

# **Software de Geometria 3D na Compreensão das Demonstrações de Matemática --- GeoGebra 3D**

Cristina Maria da Ascensão Barbosa Soares

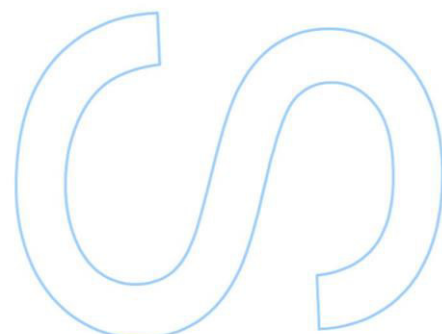
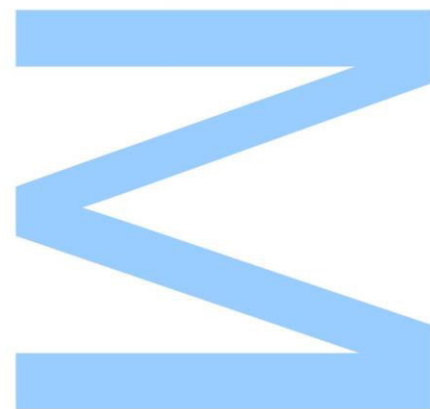
Mestrado de Matemática Para Professores

Matemática

2019

Orientador

**Professor José Carlos de Sousa Oliveira  
Santos**

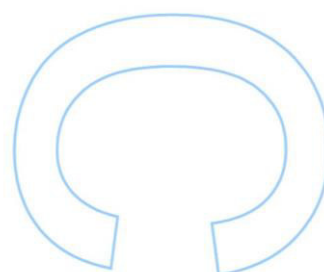
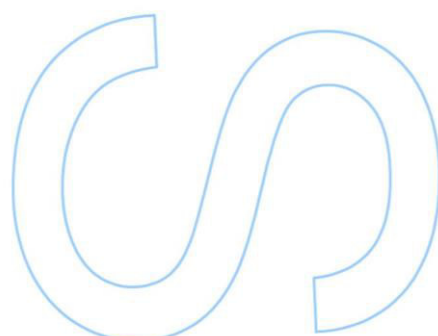
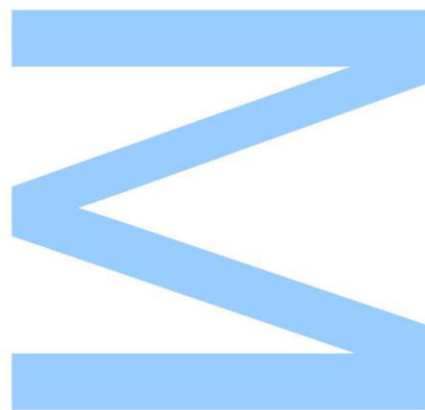




Todas as correções determinadas pelo júri, e só essas, foram efetuadas.

O Presidente do Júri,

Porto, \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_



Cristina Maria da Ascensão Barbosa Soares

# **Software de Geometria 3D na Compreensão das Demonstrações de Matemática — GeoGebra 3D**

Portugal  
2019, Outubro



Cristina Maria da Ascensão Barbosa Soares

**Software de Geometria 3D na Compreensão das Demonstrações  
de Matemática — GeoGebra 3D**

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Departamento de Matemática

Mestrado em Matemática para Professores

Orientador: José Carlos de Sousa Oliveira Santos

Portugal

2019, Outubro



# Agradecimentos

Começo por agradecer em primeiro lugar à minha mãe por toda a orientação, ajuda e valores que me deu ao longo da vida. Pelo seu exemplo como professora, pela força e exemplo de luta e coragem que me transmitiu. Pelo seu profissionalismo e acima de tudo pelo gosto de ser professora que também me contagiou. Toda esta força deu-me coragem para prosseguir e avançar com este projeto muitas vezes dificultado pelo fato de me encontrar a trabalhar longe de casa. Ainda hoje uma fonte de inspiração.

Ao meu namorado e amigo Rui Certã por todo o apoio.

Aos colegas de mestrado, portugueses, brasileiros e timorenses que cruzaram no meu caminho, pela troca de saberes e vivências que me enriqueceram como profissional e pessoa.

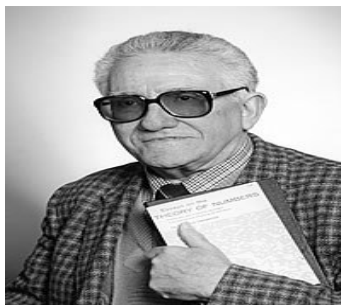
Agradeço também a todos os professores do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, principalmente aos que foram meus professores no primeiro ano de mestrado, pelo seu profissionalismo e humanidade, sempre disponíveis e que também contribuíram para esta minha formação.

Agradeço em especial ao Professor Doutor Jorge Paulo Maurício de Carvalho que sempre esteve disponível para me atender.

E por último agradeço ao Professor Doutor José Carlos Santos, meu orientador nesta tese de mestrado, pela sua completa disponibilidade tanto durante a orientação da tese como fora dela. Pelo rigor e cuidado com que sempre me orientou, pelo grau de exigência na forma como me orientou e me «fez» aprender e «fazer», muitas vezes dificultado pela distância nas orientações. Um muito obrigada. . .







«O concreto não é mais que o abstrato que se tornou familiar»  
(José Morgado)



# Resumo

Esta dissertação é constituída por cinco capítulos. No subcapítulo 1.1 do primeiro capítulo «A Demonstração» procurarei explorar e expor as diferentes funções da demonstração baseando-me principalmente num artigo de Michael de Villiers e tendo como auxílio outros artigos que referencio na bibliografia. No subcapítulo 1.2 «Software de Geometria 3D na Compreensão das Demonstrações de Matemática em Geometria» procuro investigar as possibilidades de aprendizagem de conceitos matemáticos através das demonstrações e as suas vantagens com recurso ao software *GeoGebra 3D*. Procurarei «demonstrar» que as atividades exploratório-investigativas utilizando o *software GeoGebra 3D* são propícias para desafiar, incentivar, investigar, refletir, justificar e argumentar sobre as atividades realizadas bem como a produção de conhecimentos geométricos e matemáticos. No subcapítulo 1.3 «Integração Curricular da Demonstração : a sua importância no ensino da Matemática» questiono a inclusão curricular da demonstração no ensino da Matemática, a sua relevância e a forma como deve ser lecionada e no subcapítulo 1.4 «Geometria e Demonstração» veremos que a Geometria é um dos campos mais férteis para o desenvolvimento de diferentes formas de raciocínio, em especial o dedutivo. Exploraremos a importância da Geometria no currículo da disciplina de matemática. Nos capítulos 2, 3 e 4 trabalharei o volume da pirâmide, do cone e da esfera, e a área lateral de prismas, pirâmides e sólidos de revolução (cone, cilindro e esfera) tendo por base o Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico. No último capítulo abordarei o Produto Escalar (Produto Interno), trabalhado no ensino secundário fundamentando-me no Programa e Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário (Cursos Científico – Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas). Todas as demonstrações foram auxiliadas por construções geométricas no *GeoGebra 3D* e encontram-se gravadas num CD em anexo.

**Palavras-chave:** Demonstração, *Geogebra 3D*, Geometria, Ensino.



# Abstract

This dissertation consists of five chapters. In the subchapter 1.1 of the first chapter «The Demonstration» I will seek to explore and expose the different functions of the demonstration based primarily on an article by Michael de Villiers and with the help of other articles I refer to in the bibliography. In the subchapter 1.2 «3D Geometry Software in Understanding Geometry Mathematical Demonstrations» I seek to investigate the learning possibilities of mathematical concepts through demonstrations and their advantages using the *GeoGebra 3D* software. I will seek to «demonstrate» that exploratory-investigative activities using *GeoGebra 3D* software are conducive to challenging, encouraging, investigating, reflecting, justifying and arguing about the performed activities as well as the production of geometric and mathematical knowledge. In subchapter 1.3 «Curricular Integration of Demonstration: its importance in mathematics teaching» I question the curricular inclusion of demonstration in mathematics teaching, its relevance and how it should be taught and in subchapter 1.4 «Geometry and Demonstration» we will see that Geometry is one of the most fertile fields for the development of different forms of reasoning, especially deductive. We will explore the importance of Geometry in Mathematics curriculum. In chapters 2, 3 and 4 I will work on the volume of the pyramid, cone and sphere, and the lateral area of prisms, revolution solids (pyramid, cone and cylinder) and the lateral area of the spherical surface based on the Mathematics Program and Curriculum Goals of Basic Education. In the last chapter I will approach the Scalar Product (Internal Product), taught in secondary education based on the Program and Curricular Goals of Mathematics A of Secondary Education (Scientific - Humanistic Sciences and Technologies and Socioeconomic Sciences Courses). All demonstrations were aided by geometric constructs in *GeoGebra 3D* and are recorded on an attached CD.

**Keywords:** Demonstration, Geometry, *Geogebra 3D*, Teaching.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Pirâmide $[ABCV]$ . . . . .	32
Figura 2 – Pirâmides $[ABCV]$ e $[ABCG]$ . . . . .	33
Figura 3 – Pirâmides $[ABCV]$ e $[ABCG]$ $G \neq V$ . . . . .	34
Figura 4 – Pirâmides $[ABCV]$ e $[ABCG]$ $G = V$ . . . . .	34
Figura 5 – Pirâmides $[ABCV]$ e $[ABCG]$ $G \neq V$ . . . . .	34
Figura 6 – Pirâmide $[ABCD]$ . . . . .	34
Figura 7 – Prisma $[ABCDEF]$ e Pirâmide $[ABCD]$ . . . . .	35
Figura 8 – Pirâmide quadrangular $[ACEFD]$ . . . . .	35
Figura 9 – Pirâmide $[ABCD]$ . . . . .	36
Figura 10 – Pirâmide $[ADEF]$ . . . . .	36
Figura 11 – Pirâmide $[ACDE]$ . . . . .	36
Figura 12 – Pirâmide $[ACEG]$ . . . . .	36
Figura 13 – Pirâmide $[ACED]$ . . . . .	37
Figura 14 – Pirâmide $[ABCE]$ . . . . .	37
Figura 15 – Prisma triangular dividido em três pirâmides equivalentes com o seletor $t = 0$ . . . . .	37
Figura 16 – Pirâmides equivalentes resultantes da decomposição do prisma triangular em três pirâmides com o seletor $t \neq 0$ . . . . .	37
Figura 17 – Prisma triangular $[ABCDEF]$ . . . . .	38
Figura 18 – Planos concorrentes $\alpha$ e $\beta$ . . . . .	38
Figura 19 – Planos paralelos $\alpha$ e $\beta$ . . . . .	39
Figura 20 – Plano $\delta$ concorrente com os planos $\alpha$ e $\beta$ . . . . .	39
Figura 21 – Ângulos $\angle ABC$ e $\angle DEF$ com os lados correspondentes paralelos e com a mesma direção . . . . .	40
Figura 22 – Pirâmide $[V_1DEFGHI]$ . . . . .	41
Figura 23 – Pirâmides $[V_1DEFGHI]$ e $[V_2ABC]$ . . . . .	42
Figura 24 – Base pentagonal da Pirâmide $[A_1A_2A_3A_4A_5V]$ dividida em três triângulos . . . . .	44
Figura 25 – seletor $t$ com $t = 0$ . . . . .	45
Figura 26 – Pirâmide pentagonal $[A_1A_2A_3A_4A_5V]$ . . . . .	45
Figura 27 – seletor $t$ com $t \neq 0$ . . . . .	45
Figura 28 – Pirâmides resultantes da decomposição da base pentagonal da Pirâmide $[A_1A_2A_3A_4A_5V]$ em três triângulos . . . . .	45
Figura 29 – Polígonos inscritos na base de um cone . . . . .	48
Figura 30 – Pirâmides inscritas num cone . . . . .	48
Figura 31 – Polígonos circunscritos na base de um cone . . . . .	48
Figura 32 – Pirâmides circuncritas num cone . . . . .	48
Figura 33 – Polígonos inscritos e circunscritos na base de um cone . . . . .	49

Figura 34 – Pirâmides inscritas e circunscritas num cone . . . . .	49
Figura 35 – Volume da Esfera . . . . .	50
Figura 36 – Prisma [ABCDEFGHijkl] . . . . .	52
Figura 37 – Planificação do Prisma [ABCDEFGHijkl] . . . . .	52
Figura 38 – Prisma Reto [ABCDEFGH] . . . . .	52
Figura 39 – Planificação do Prisma Reto [ABCDEFGH] . . . . .	52
Figura 40 – Pirâmide Hexagonal . . . . .	53
Figura 41 – Planificação da Pirâmide Hexagonal . . . . .	53
Figura 42 – Planificação do Cilindro . . . . .	55
Figura 43 – Superfície lateral do Cilindro . . . . .	55
Figura 44 – Secção axial do Cone . . . . .	56
Figura 45 – Linha poligonal regular [ABCDEFG] inscrita na semicircunferência . . . . .	57
Figura 46 – $P \in r$ . . . . .	60
Figura 47 – $P \notin r$ . . . . .	60
Figura 48 – Plano formado pelas retas $s$ e $t$ perpendiculares a $r$ num ponto $P$ . . . . .	60
Figura 49 – Plano $\alpha$ normal a um vetor diferente do vetor nulo . . . . .	62
Figura 50 – $P \in r$ . . . . .	62
Figura 51 – $P \notin r$ . . . . .	62
Figura 52 – $OQ_1$ e $OP$ têm o mesmo sentido . . . . .	63
Figura 53 – $OQ_1$ e $OP$ têm sentido contrário . . . . .	63
Figura 54 – $P_1 = Proj_{\alpha}P$ e $P_2 = Proj_rP_1$ . . . . .	63
Figura 55 – $P_2 = Proj_rP_1 = Proj_rP$ . . . . .	63
Figura 56 – Propriedade distributiva do produto escalar em relação à adição de vetores . . . . .	64



# Sumário

	<b>Introdução</b>	<b>15</b>
<b>1</b>	<b>A DEMONSTRAÇÃO</b>	<b>17</b>
<b>1.1</b>	<b>As funções da demonstração na Matemática</b>	<b>18</b>
1.1.1	Demonstração como meio de verificação/convicção	19
1.1.2	Demonstração como meio de explicação	20
1.1.3	Demonstração como meio de descoberta	20
1.1.4	Demonstração como meio de sistematização	21
1.1.5	Demonstração como meio de comunicação	22
1.1.6	Demonstração como meio de desafio intelectual	23
<b>1.2</b>	<b>Software de Geometria 3D na Compreensão das Demonstrações de Matemática em Geometria</b>	<b>24</b>
<b>1.3</b>	<b>Integração Curricular da Demonstração : a sua importância no ensino da Matemática</b>	<b>27</b>
<b>1.4</b>	<b>Geometria e Demonstração</b>	<b>29</b>
<b>2</b>	<b>VOLUME DA PIRÂMIDE</b>	<b>31</b>
<b>3</b>	<b>VOLUME DO CONE, VOLUME DA ESFERA</b>	<b>47</b>
<b>3.1</b>	<b>Volume do Cone</b>	<b>47</b>
<b>3.2</b>	<b>Volume da Esfera</b>	<b>49</b>
<b>4</b>	<b>ÁREA LATERAL DE PRISMAS E SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO</b>	<b>51</b>
<b>4.1</b>	<b>Área (da Superfície) Lateral do Prisma</b>	<b>51</b>
<b>4.2</b>	<b>Área (da Superfície) Lateral da Pirâmide</b>	<b>53</b>
<b>4.3</b>	<b>Área (da Superfície) Lateral do Cilindro e Área Total do Cilindro</b>	<b>54</b>
<b>4.4</b>	<b>Área (da superfície) Lateral do Cone e Área Total do Cone</b>	<b>55</b>
<b>4.5</b>	<b>Área da Superfície Esférica</b>	<b>56</b>
<b>5</b>	<b>PRODUTO ESCALAR (PRODUTO INTERNO)</b>	<b>59</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>67</b>



# Introdução

Analisando o contexto do ensino de matemática, em Portugal, observa-se que a demonstração não tem o peso merecido no currículo dos nossos alunos. Na sala de aula a prática escolar restringe-se, na maior parte das vezes, à resolução de atividades não acompanhadas das respectivas justificações e argumentações não fomentando nos nossos alunos a reflexão necessária no que diz respeito ao raciocínio matemático. O objetivo desta dissertação é apresentar a relevância do uso de demonstrações nas aulas de matemática no ensino básico e secundário, com o auxílio dos ambientes de geometria dinâmica, nomeadamente o *GeoGebra 3D*, como fator importante da promoção da compreensão matemática. A demonstração matemática tem de ser vista tanto por alunos quanto por professores como parte inerente, própria da matemática não podendo ser desassociada. Neste contexto as novas tecnologias, em particular o computador e os ambientes de geometria dinâmica, têm um grande contributo permitindo aos alunos participar na construção do seu conhecimento e ter um papel mais ativo no seu processo ensino/ aprendizagem. Os alunos conjecturam, deduzem, argumentam os resultados matemáticos explorados nas tarefas propostas pelo professor e ganham o gosto de aprender matemática. O *software* de Geometria 3D surge assim como um facilitador da Compreensão das Demonstrações de Matemática em Geometria, principal mote a ser explorado nesta tese. As novas tecnologias vieram transformar o ensino da Matemática, os ambientes de geometria dinâmica possibilitam a construção e a manipulação de figuras envolvendo os alunos de uma forma mais ativa. Ao longo da realização de tarefas investigativas estes constroem, analisam as propriedades e as relações geométricas inerentes a estas e finalmente argumentam os resultados conjecturados. «Vários estudos mostram que o recurso ao *GeoGebra* pode trazer importantes benefícios, ao permitir, de uma forma mais ou menos intuitiva, construir e explorar figuras, formular conjecturas e relacionar propriedades que se evidenciam durante o processo de manipulação» conforme referenciado pelo *NCTM (The National Council of Teachers of Mathematics)* — Princípios e Normas para a Matemática Escolar e citado em (AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015). Os alunos relacionam conceitos geométricos, refletem e utilizam raciocínios matemáticos através de cadeias argumentativas que visam demonstrar propriedades que são evidenciadas pelas figuras produzidas e exploradas pelo *GeoGebra*. Segundo Yang «os alunos, a partir da construção de figuras no *GeoGebra*, poderão estruturar os seus raciocínios e potenciar a utilização da lógica dedutiva através da visualização de figuras e análise das suas propriedades, enquanto estruturas dinâmicas», também citado em (AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015). Assim sendo e voltando ao mote desta tese procurarei explorar e tentar responder às seguintes questões: de que forma o *software* de Geometria 3D, mais propriamente o *GeoGebra 3D*, estimula e desenvolve o raciocínio lógico-dedutivo? de que forma o *GeoGebra 3D* é uma ajuda, para alunos e professores, na compreensão das demonstrações de matemática?



# 1 A Demonstração

Tradicionalmente a verificação é a principal função da demonstração, tendo-se dado apenas ênfase à verificação dos resultados. Tradicionalmente os alunos e a maior parte dos professores reconhecem a verificação como a principal, senão a única função da demonstração. Baseado no artigo de Michael de Villiers ([VILLIERS, 1990](#)) procurarei expor e apresentar seis diferentes funções da demonstração matemática. Esta análise é baseada em considerações epistemológicas assim como no testemunho de vários matemáticos. Concluiremos que se considerarmos apenas a verificação como a principal função da demonstração, esta é nalguns casos a menos importante comparativamente às outras cinco funções.

A maior parte dos professores de matemática sente a dificuldade que os alunos têm em compreender e executar uma demonstração matemática. Mais, sentem que estes não vêm qual a necessidade de se demonstrar resultados matemáticos. Quantos de nós professores nunca fomos questionados pelos nossos alunos com a questão: «Porque é que temos de demonstrar isto?». Segundo F. N. Gonobolin e citado em ([VILLIERS, 1990](#)) «... os alunos ... não reconhecem a necessidade da prova lógica de teoremas geométricos, especialmente quando essas provas são visualmente óbvias ou podem ser facilmente estabelecidas empiricamente». Os alunos não vêm nem entendem a função da demonstração. Villiers considera que para contrariar esta situação é importante não só apresentar e colocar os alunos a demonstrar mas sim explicar aos alunos as diferentes funções da demonstração. Torna-se assim fundamental pesquisar quais as funções que a demonstração tem na matemática de forma a ser utilizada em sala de aula e torná-la uma atividade mais atrativa e significativa para os alunos. Para enfatizar estas ideias baseei-me também na investigação e no estudo de outros matemáticos que evidenciam a importância «do papel do professor na negociação com os alunos da necessidade da demonstração na aula de Matemática e do seu significado.» citando Elvira Santos e Margarida Rodrigues em ([SANTOS; RODRIGUES, 2009](#)). Com o seu testemunho relacionamos a ação didática do professor com as funções da demonstração apresentadas por de Villiers. A demonstração é assim vista numa nova perspetiva «como forma particular de argumentação matemática ... A partir de figuras construídas no *GeoGebra*, os alunos estruturaram ideias matemáticas e raciocínios e construíram cadeias argumentativas.» ([AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015](#))

Veremos também a importância do *software* de Geometria 3D nas aulas de matemática, debateremos a importância da integração curricular da demonstração no ensino português e a Geometria como um dos campos mais férteis para o desenvolvimento de diferentes formas de raciocínio, em especial o dedutivo. «Os alunos reconhecem a importância do *GeoGebra* na sua atividade como fator motivador e, acima de tudo, por permitir experimentar e manipular figuras. O *GeoGebra* surge assim como ponto de partida para a demonstração.» ([AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015](#))

## 1.1 As funções da demonstração na Matemática

Como já foi dito anteriormente tradicionalmente a demonstração tem como principal função a verificação, ou seja, a confirmação da veracidade dos resultados matemáticos. Senão vejamos as seguintes citações em (VILLIERS, 1990):

1. segundo M. Kline — «uma demonstração só tem sentido quando responde às dúvidas dos alunos, quando prova o que não é óbvio»
2. segundo D. Alibert — «A necessidade, a funcionalidade, da demonstração pode apenas emergir em situações em que os alunos têm incertezas quanto à verdade das proposições matemáticas.»
3. segundo G. Hanna — «Uma demonstração é um argumento necessário para validar uma afirmação, um argumento que pode assumir várias formas diferentes desde que seja convincente.»
4. segundo J.D. Volmink — «Porque é que nos preocupamos em demonstrar teoremas? Defendo aqui que a resposta é: para que possamos convencer pessoas (incluindo nós próprios) ... podemos encarar a demonstração como um argumento suficiente para convencer um cético razoável.»

Prosseguindo com a análise do artigo de de Villiers, este afirma que muitos autores falam em rigor, dedução, entretanto também para estes autores a verificação é a principal função da demonstração: segundo H. Freudenthal, por exemplo, « ... para haver progresso no rigor, o primeiro passo é duvidar do rigor em que se acredita naquele momento. Sem esta dúvida nada haveria que levasse outras pessoas a prescrever para si próprios novos critérios de rigor» citado em (VILLIERS, 1990). Já A. W. Bell considera que se considerarmos a verificação/convicção como a principal função da demonstração, esta «passa ao lado da consideração da natureza real da demonstração», pois a convicção em matemática é muitas vezes «inteiramente obtida por meios que não consistem em seguir uma demonstração lógica» citado em (VILLIERS, 1990). É assim, significativo, considerarmos atualmente nas nossas investigações matemáticas uma análise mais completa das diversas funções e papéis da demonstração.

Bell aponta três importantes funções para a demonstração: verificação, iluminação e sistematização. Michael de Villiers, expande o modelo exposto por Bell e considera as seguintes funções:(VILLIERS, 1990)

1. verificação (a principal preocupação é a verdade de uma declaração);
2. explicação (a principal preocupação é o porquê da verdade da declaração);
3. sistematização (organização de vários resultados num programa dedutivo, num sistema de axiomas, principais conceitos e teoremas);
4. descoberta (a descoberta ou invenção de novos resultados);

5. comunicação (a transmissão do conhecimento matemático);
6. desafio intelectual (a autorrealização, realização derivada da construção da demonstração).

Atualmente em matemática é urgente explorar e apresentar as várias funções da demonstração. A intuição continua a ter o seu papel, continua a ser a primeira no processo da descoberta dos resultados, mas uma demonstração deve exigir a apresentação formal de argumentos e o raciocínio seguido pelos alunos, para que estes fiquem convencidos. É importante fazerem a verificação e a comunicação das suas convicções sobre o resultado que demonstraram.

### 1.1.1 Demonstração como meio de verificação/convicção

«Com raras exceções, os professores de matemática parecem acreditar que apenas a demonstração fornece a certeza para o matemático e que, portanto, é a única autoridade para estabelecer a validade de uma conjectura. A demonstração não é um pré-requisito para a convicção, pelo contrário, a convicção é mais frequentemente um pré-requisito para a procura de uma demonstração» (VILLIERS, 1990). A convicção/verificação é um pré-requisito para a motivação e um arranque para iniciar uma demonstração com mais confiança. George Polya citado em (VILLIERS, 1990) afirma que «... tendo verificado o teorema em muitos casos particulares, obtivemos uma forte evidência indutiva a seu respeito. A fase indutiva venceu a nossa suspeita inicial e deu-nos uma forte confiança no teorema. Sem tal confiança dificilmente teríamos encontrado coragem para empreender a sua demonstração que não parece de modo algum uma tarefa rotineira. Quanto se está convencido que o teorema é verdadeiro, começamos a demonstrá-lo.» A convicção anterior à demonstração propicia a motivação para a demonstração e assim sendo compete ao professor mostrar aos seus alunos que a função da demonstração é algo diferente da verificação/convencimento. Na investigação matemática a convicção resulta de uma combinação de intuição, verificação quase-empírica e de uma demonstração lógica.

Logicamente, temos necessidade de alguma forma de uma demonstração dedutiva, mas psicologicamente parece que precisamos (e não são só os nossos alunos) ao mesmo tempo de alguma experimentação ou compreensão intuitiva. Dadas as limitações bem conhecidas da intuição e dos métodos empíricos pretende-se dar à demonstração uma nova perspetiva em oposição à idealização preconcebida da demonstração como único (e absoluto) meio de verificação/convicção.

E citando agora as Metas Curriculares do Ensino Básico: «O raciocínio matemático é por excelência o raciocínio hipotético-dedutivo, embora o raciocínio indutivo desempenhe também um papel fundamental, uma vez que preside, em Matemática, à formulação de conjecturas» (BIVAR et al., 2012). Os alunos no 3.º ciclo deverão ser capazes de formular conjecturas, mas ter conhecimento que o raciocínio indutivo é insuficiente para as justificar e pode levar a conclusões erradas. A ideia da convicção/verificação como único intuito de eliminar dúvidas é muito limitado (VILLIERS, 1990) e devem assim os professores alertar os alunos para tal e incentivá-los a

justificar os resultados. «Os desempenhos requeridos para o cumprimento dos descritores nos vários ciclos apontam para uma progressiva proficiência na utilização do raciocínio hipotético-dedutivo e da argumentação matemática.» (BIVAR et al., 2013c) Assim sendo os alunos no 3º ciclo devem ser já capazes de efetuar demonstrações matemáticas com algum rigor.

### 1.1.2 Demonstração como meio de explicação

Através de uma verificação quase empírica de uma conjectura, por exemplo através de construções geométricas, substituições numéricas, e outras, os nossos alunos são capazes de achar que isto é suficiente para justificar as propriedades que lhes são pedidas. Sentir-se-ão mais confiantes, mas não percebem porque é que essa conjectura/propriedade é verdadeira. Aumentando o número de experiências empíricas, e embora a consideração de mais e mais exemplos possa aumentar ainda mais a sua confiança, estes não obtêm um esclarecimento ou compreensão dos resultados que estão a explorar. Repetindo a conjectura para vários casos semelhantes verão a sua confiança aumentada, poderão confirmar que é verdadeiro, mas não compreendem porque é que essa conjectura é uma consequência dos vários casos semelhantes que experimentaram (VILLIERS, 1990).

«Neste sentido, a melhor demonstração é aquela que permite entender o significado do teorema a demonstrar, ou seja, perceber não só o que é verdadeiro, mas também a razão da sua veracidade», segundo Ana Barbosa em (BARBOSA et al., 2002), citação apoiada em G. Hanna. Pretende-se assim, que os alunos não só justifiquem os resultados, mas que melhorem e compreendam os conhecimentos matemáticos inerentes numa demonstração. «Uma demonstração que prova pode apoiar-se só em regras de sintaxe enquanto que uma demonstração que explica deve utilizar raciocínios baseados em ideias matemáticas.» citando mais uma vez Ana Barbosa em (BARBOSA et al., 2002), citação essa baseada em G. Hanna. De Villiers em (VILLIERS, 1990) afirma que Y. I. Manin e A. W. Bell acreditam que a explicação é um bom critério para definir o que é uma «boa» demonstração, afirmando respetivamente que é «aquela que nos torna mais inteligentes». Assim, quando nos depararmos em sala de aula que os nossos alunos estão convencidos intuitivamente de que uma conjectura é válida é nosso dever explicar-lhes que a função da demonstração não é só a da verificação e desafiá-los a fazer ou apresentar-lhes a demonstração que explica melhor.

### 1.1.3 Demonstração como meio de descoberta

Consultando o Programa e Metas Curriculares de Matemática — Ensino Básico destacam-se três grandes finalidades para o ensino da Matemática: a estruturação do pensamento, a análise do mundo natural e a interpretação da sociedade. (BIVAR et al., 2013c) Na estruturação do pensamento «a apreensão e hierarquização de conceitos matemáticos, o estudo sistemático das suas propriedades e a argumentação clara e precisa, própria desta disciplina, têm um papel primordial na organização do pensamento, constituindo-se como uma gramática basilar do raciocínio hipotético-dedutivo.» Os alunos devem ser capazes de estabelecer conjecturas, em alguns casos, após a análise de um conjunto de situações particulares. «O trabalho desta gramática contribui para alicerçar a capacidade de elaborar análises objetivas, coerentes e comunicáveis.



Contribui ainda para melhorar a capacidade de argumentar, de justificar adequadamente uma dada posição e de detetar falácias e raciocínios falsos em geral.» (BIVAR et al., 2013c) Quando o professor demonstra um problema, ele está a utilizar o método dedutivo. Isso porque ele parte de uma proposição universal, e através do raciocínio lógico, chega a uma conclusão válida. Mesmo no contexto de processos dedutivos formais como a axiomatização ou a criação de novas definições, a demonstração pode frequentemente levar à descoberta de novos resultados. Assim, para os matemáticos a demonstração não serve apenas para verificar um resultado já descoberto, mas serve também e principalmente para explorar, analisar, descobrir e inventar novos resultados.(VILLIERS, 1990)

#### 1.1.4 Demonstração como meio de sistematização

No domínio Geometria e Medida – GM9, no subdomínio Axiomatização das teorias Matemáticas e no objetivo geral 1 – Utilizar corretamente o vocabulário próprio do método axiomático temos que no descritor 1 o aluno deve «Identificar uma «teoria» como um dado conjunto de proposições consideradas verdadeiras, incluindo-se também na teoria todas as proposições que delas forem dedutíveis logicamente.» e no descritor 3 o aluno deve « Designar por «axiomática de uma teoria» um conjunto de objetos primitivos, relações primitivas e axiomas a partir dos quais todos os objetos e relações da teoria possam ser definidos e todas as proposições verdadeiras demonstradas e utilizar corretamente os termos «definição», «teorema» e «demonstração de um teorema.» (BIVAR et al., 2013c). Estas definições vão de encontro à definição de demonstração de Villiers: «A demonstração é uma ferramenta indispensável para sistematizar vários resultados conhecidos num sistema de axiomas, definições e teoremas.» (VILLIERS, 1990) Segundo De Villiers as funções de uma sistematização dedutiva de resultados conhecidos são as seguintes:

1. «Ajuda a identificar inconsistências, argumentos circulares, e hipóteses escondidas ou não explicitamente declaradas»;
2. «Unifica e simplifica as teorias matemáticas ao integrar e ligar entre si afirmações, teoremas e conceitos não relacionados, conduzindo assim a uma apresentação económica dos resultados»;
3. «Fornece uma perspetiva global ou vista de conjunto de um tópico, ao mostrar a estrutura axiomática subjacente do tópico a partir da qual todas as outras propriedades podem ser derivadas»;
4. «Constitui uma ajuda para as aplicações tanto dentro como fora da matemática, pois torna possível verificar a possibilidade de aplicação de toda uma estrutura complexa ou teoria através de uma avaliação da aplicabilidade dos seus axiomas e definições»;
5. «Conduz muitas vezes a sistemas dedutivos alternativos que fornecem novas perspetivas e/ou são mais económicos, elegantes e poderosos do que os existentes.»

Relativamente ao item 1, citando mais uma vez as Metas Curriculares do Ensino Básico no descritor 2 do domínio GM9 o aluno deve «Reconhecer, no âmbito de uma teoria, que para

não se incorrer em raciocínio circular ou numa cadeia de deduções sem fim, é necessário fixar alguns objetos («objetos primitivos»), algumas relações entre objetos que não se definem a partir de outras («relações primitivas»), e algumas proposições que se consideram verdadeiras sem as deduzir de outras («axiomas») e relativamente ao item 4 no descritor 4, também do domínio GM9 o aluno deve «saber que os objetos primitivos, relações primitivas e axiomas de algumas teorias podem ter interpretações intuitivas que permitem aplicar os teoremas à resolução de problemas da vida real e, em consequência, testar a validade da teoria como modelo da realidade em determinado contexto.» (BIVAR et al., 2013c). Voltando a De Villiers o objetivo principal da demonstração como meio de sistematização não é «verificar se certas afirmações são realmente verdadeiras», mas sim organizar afirmações individuais logicamente não relacionadas, que já são conhecidas como verdadeiras, em um todo unificado e coerente. Neste caso o foco recai sobre a visão global em vez da local. Assim, nós professores quando nos depararmos com «resultados evidentes por si próprios», como por exemplo, a igualdade dos ângulos verticalmente opostos, não podemos afirmar que estamos a «adquirir a certeza». Os matemáticos não estão assim tão preocupados com a veracidade dos teoremas, mas sim com a sua sistematização no seio de um sistema dedutivo. (VILLIERS, 1990).

#### 1.1.5 Demonstração como meio de comunicação

A função comunicativa da demonstração tem uma grande importância para os matemáticos. J. D. Volmink em (VILLIERS, 1990) afirma : «... parece que a demonstração é uma forma de discurso, um meio de comunicação entre pessoas fazendo matemática. » P. J. Davis também em (VILLIERS, 1990) afirma mesmo que a demonstração «cria um fórum para o debate crítico». Nesta perspetiva a demonstração é uma «forma única de comunicar resultados matemáticos entre matemáticos profissionais, entre professores e alunos, e mesmo entre estudantes.»(VILLIERS, 1990)

«Encarando a demonstração como um processo em que os alunos, ao longo da sua escolaridade, e através da argumentação em torno da justificação e da defesa das suas próprias afirmações, vão construindo gradualmente a noção de demonstração, a sua integração curricular no ensino básico é de extrema pertinência, enquanto instrumento ao serviço de uma compreensão mais aprofundada da Matemática.» (RODRIGUES, 2010) Assim sendo, na sala de aula, a demonstração pode ser vista como um meio de comunicação, o processo de ensino-aprendizagem da Matemática deve incluir tarefas que permitam aos alunos investigar, inquirir, explorar, construir, argumentar racionalmente. O professor deverá monitorizar a atividade dos alunos, respondendo às questões que forem sendo colocadas, por forma a facilitar o progresso das investigações, contudo, resistindo à tentação de apresentar a solução do problema. No final da atividade, em plenário, os alunos apresentam os seus resultados e justificações resultantes da sua exploração. Em ambiente de sala de aula gera-se uma comunicação matemática onde os alunos expõem o seu pensamento matemático, as suas resoluções, defendem e explicam o seu raciocínio quando questionados pelo professor e pelos próprios colegas, permitindo que este seja motivo de reflexão.

Entendo que as ferramentas cognitivas, numa perspetiva construtivista da aprendizagem,

facilitam o pensamento crítico, permitem uma aprendizagem significativa e envolvem ativamente os alunos: na construção de conhecimento, na conversação, na articulação, na colaboração e na reflexão. No meu entender os nossos alunos com a exploração e manipulação dos conceitos através deste processo- demonstração como meio de comunicação adquirem uma aquisição mais significativa dos conceitos presentes no objeto.

Neste sentido, a demonstração é enfatizada como um processo social de comunicar. De facto, neste processo de explicitação e partilha os alunos ampliam a sua compreensão matemática e o modo integral como estes tomam posse do significado da demonstração é revelado pelo modo e grau com que usam e afirmam com significados matemáticos negociados com os colegas. A aprendizagem da demonstração é assim é feita pelo grupo sala de aula.

«A demonstração, na aula de Matemática, poderá decorrer de uma justificação que encerre um raciocínio dedutivo e o carácter geral do universo matemático, ou de um contraexemplo que refute a validade de uma dada afirmação.» (RODRIGUES, 2010) A demonstração é vista assim como um processo de comunicar e expandir o conhecimento matemático em sala de aula e também na sociedade. Ao comunicarem, professores e alunos, alunos e alunos e mesmo os matemáticos entre si conseguem chegar à conclusão não só dos significados dos conceitos trabalhados como também dos critérios relativos que tornam um argumento é aceitável ou não. «A filtragem social de uma demonstração através destas várias comunicações contribui para o seu refinamento e a identificação de erros, bem como, por vezes, a sua rejeição devido à descoberta de um contraexemplo.» (VILLIERS, 1990)

#### 1.1.6 Demonstração como meio de desafio intelectual

Resolver puzzles, quebra-cabeças, realizar uma maratona ou um triatlo é para muitas pessoas um desafio e De Villiers afirma que talvez com estes exemplos, ao conseguir concretizá-los elas entendam «a exuberância com a qual Pitágoras e Arquimedes celebraram a descoberta das suas demonstrações.» (VILLIERS, 1990) Neste sentido, a demonstração cumpre uma função gratificante e de realização pessoal. «A demonstração é, portanto, um campo de testes para a resistência intelectual e engenhosidade do matemático» segundo P. J. Davis e R. Hersh citado em (VILLIERS, 1990). A demonstração surge assim como um desafio intelectual, de autorrealização e cumprimento pessoal. De Villiers faz mesmo uma analogia usando as palavras de Mallory 's, sobre os seus motivos para subir o monte Everest, e o desafio intelectual de realizar uma demonstração: «Demonstramos os nossos resultados porque eles estão diante de nós. Muitas vezes não é a existência da montanha que está em dúvida (a verdade do resultado), mas se (e como) seremos capazes de conquistá-la (demonstrá-la)!» (VILLIERS, 1990) E é esta ideia que nós professores devemos transmitir aos nossos alunos. Conseguindo realizar uma demonstração, conseguindo realizar este desafio, desafio este que a maior parte de nós constata que não é nada fácil, estes sentir-se-ão mais motivados e convencidos que precisam da demonstração para explicar e compreender porque é que um teorema é verdadeiro. Assim sendo, no futuro, a tónica do desempenho profissional dos professores deve ser colocada na sua ação na sala de aula de tal forma que consigam promover e ajudar os seus alunos a fazer e a compreender as demonstrações matemáticas.

## 1.2 Software de Geometria 3D na Compreensão das Demonstrações de Matemática em Geometria

Este subcapítulo foi desenvolvido e explorado com base no documento: «A Utilização do *GeoGebra* na Demonstração Matemática em Sala de Aula: o estudo da reta de *Euler*». (AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015) Baseei-me na experiência dos três autores deste artigo uma vez que não fiz qualquer investigação neste campo e foi meu objetivo que tudo o que explorasse e expusesse neste subcapítulo fosse fundamentado em factos reais. Trata-se de um estudo de caso, envolvendo uma turma do 9.º ano, no qual foram tratadas propriedades do triângulo e seus pontos notáveis. Segundo estes autores, «a partir de figuras construídas no *GeoGebra*, os alunos estruturaram ideias matemáticas e raciocínios e construíram cadeias argumentativas. Os dados analisados mostram que a maioria dos alunos formula e explora conjecturas, procurando caminhos para a sua justificação. Os alunos reconhecem a importância do *GeoGebra* na sua atividade como fator motivador e, acima de tudo, por permitir experimentar e manipular figuras. Os resultados apontam a importância da atividade com o *GeoGebra*, na construção e manipulação como ponto de partida para a demonstração.» (AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015) Também me baseei em outros artigos que cito ao longo do subcapítulo.

Segundo os autores do artigo que referi atrás, o público alvo - os alunos - nunca tinham feito qualquer demonstração e trabalhado com o computador em sala de aula. Na sua conclusão os autores afirmam: «o recurso ao computador e, em particular, ao *GeoGebra*, não originou qualquer dificuldade para os alunos que, pelo contrário revelaram um grande à vontade na manipulação desta ferramenta, emergindo desse uso diversas vantagens. Os alunos revelaram também gosto e entusiasmo em trabalhar com o *GeoGebra* na aula de Matemática.» (AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015) Considero que uma utilização do *software* de Geometria dinâmica, nomeadamente o *GeoGebra*, devidamente cuidada e planificada, é útil e motivadora, quer para professores, quer para alunos. Da minha experiência como professora constato que se utilizarmos um programa de Geometria dinâmica em sala de aula, um grupo de alunos pouco motivados rapidamente se transforma num grupo mais aplicado e aos poucos o seu interesse pelas atividades a realizar aumenta.

Voltando aos autores mencionados atrás estes referem ainda que: «o recurso ao computador foi determinante no desenvolvimento de uma cadeia de argumentos.» (AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015) «Os ambientes de geometria dinâmica e, em particular, o *GeoGebra* permitem o movimento das figuras e a conservação das suas propriedades, fazendo emergir conjecturas e sendo um estímulo para novas demonstrações.» (AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015) Com a construção de figuras, em ambientes de geometria dinâmica, nas tarefas exploratórias e de investigação propostas pelos professores os alunos exploram relações entre objetos, conseguem executar um grande número de experiências num curto espaço de tempo, e elaboram conjecturas. Ao arrastarem essas figuras, ao manipulá-las, elas deformam-se. Os alunos observam que muitas relações e medidas se alteram, mas outras se mantêm constantes. Observando estas propriedades das figuras que se mantêm constantes os alunos formulam conjecturas, descrevem processos e justificam -os com um rigor progressivo. Ao elaborarem as suas justificações produzem pequenas cadeias dedutivas, começam a familiarizar-se com o

processo da demonstração e iniciam o raciocínio geométrico dedutivo. «A criação de figuras em ambientes de geometria dinâmica, como o *GeoGebra*, é um fator promotor de conhecimento, na medida em que durante a construção os alunos estão a utilizar conceitos geométricos, permitindo que as figuras mantenham as propriedades durante a manipulação e desta forma observam resultados que se tornam invariantes e formulam conjecturas.» (AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015)

«Os programas de geometria dinâmica permitem descobrir instantaneamente se uma conjectura é verdadeira ou falsa - se for falsa, é imediatamente óbvio quando se arrasta a figura; se for verdadeira, os seus elementos permanecem em harmonia, independentemente da manipulação.» (BARBOSA et al., 2002)

Com esta resposta visual os alunos ficam convencidos dos resultados, «os ambientes computacionais dinâmicos permitem que os alunos se convençam, de uma forma segura, da veracidade de uma proposição, existindo, por isso, o perigo de confundirem esta evidência, que surge indutivamente, com uma demonstração» afirma G. Hanna em (BARBOSA et al., 2002). Voltando a De Villiers: quando os alunos formulam uma conjectura geométrica através da manipulação de figuras com *software* dinâmico, como por exemplo o *GeoGebra*, não sentem necessidade de mais convicção ou de verificar os resultados descobertos. Assim a verificação não surge como um meio motivacional para fazer uma demonstração. «No entanto eu achei interessante suscitar mais curiosidade nos alunos questionando-os porque é que um resultado é verdadeiro, isto é desafiá-los a tentar explicá-lo. Os estudantes admitem rapidamente que verificação indutiva meramente confirma; não dá sentido satisfatório de iluminação, percepção ou compreensão de como a conjectura é uma consequência de outros resultados familiares. Eles parecem então desejar procurar argumentos dedutivos como uma tentativa de explicação, mais do que uma verificação.» (VILLIERS, 1990) «Noutros casos, o aparecimento de contraexemplos ajuda a refutar conjecturas pré-estabelecidas. O facto de não surgirem contraexemplos contribui para que os alunos se convençam da veracidade de um resultado, tornando-se então essencial, que daí resulte o desafio de perceber a razão dessa veracidade».(VILLIERS, 1990)

Olhando agora, mais uma vez, o testemunho dos três autores do artigo referido atrás: «Dado o tópico escolhido neste estudo – os triângulos e seus pontos notáveis – o uso do *GeoGebra* revela-se uma ferramenta muito útil na construção dos triângulos e de todas as linhas inerentes à construção dos pontos notáveis, tais como: mediatriz de um segmento de reta, bissetriz de um ângulo, altura de um triângulo. Permite ainda medir comprimentos de segmentos de reta, amplitudes de ângulos e representar de forma rápida circunferências, aspetos essenciais ao estabelecimento de conjecturas. O computador é usado como um meio de visualização/verificação e exploração das figuras, permitindo identificar propriedades relacionadas com estes pontos, ajudando os alunos a formular conjecturas e a testar resultados.»(AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015) Ao manipular as figuras os alunos percebem que os pontos notáveis de um triângulo continuam a verificar certas propriedades, os alunos verificam que aquilo que visualizam parece ser verdadeiro constituindo para os alunos uma prova irrefutável e a demonstração matemática surge naturalmente como um meio que permite a compreensão e a explicação de tais resultados. A demonstração aparece neste contexto como um meio para a compreensão de resultados matemáticos e não como um pré- requisito necessário para

convencer os alunos da verdade.

É de realçar outro aspeto que estes três autores referem como vantagem do *GeoGebra* em relação à construção de figuras com papel e lápis. Facilmente se detetam as dificuldades de compreensão dos resultados que os alunos demonstram quando constroem uma figura com papel e lápis. Um ambiente de geometria dinâmica permite superar definitivamente essas dificuldades. Por exemplo, os alunos quando constroem um triângulo e as suas medianas, ao arrastarem um vértice para transformar o triângulo, aparecem novos triângulos e as respetivas medianas vêm também por arrasto. Assim, para cada triângulo visualizado são válidas as propriedades que derivam da teoria como, por exemplo, que as medianas são concorrentes e se cortam na razão de dois para um. O recurso a *software* de geometria dinâmica, como o *GeoGebra*, surge assim como um meio impulsionador e facilitador da realização de conjecturas, das respetivas demonstrações e da compreensão dos resultados matemáticos daqui inerentes. Tal como refere Santos-Trigo em (AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015), «o recurso ao *GeoGebra*, permitiu desenvolver conhecimentos que apenas o trabalho com papel e lápis não tornaria facilmente acessível nem compreensível pelos alunos; é este o verdadeiro sentido da utilização da tecnologia na aula de Matemática. Os alunos, a partir do trabalho feito no *GeoGebra*, compreenderam qual era o objetivo que pretendiam alcançar e foram capazes de traduzir os seus raciocínios dedutivos com papel e lápis.»

Ao longo do estudo os três autores verificaram que os alunos demonstraram dificuldades na construção de cadeias argumentativas, mas este estudo serviu para mostrar aos professores a importância dos seus alunos justificarem e argumentarem as suas ideias ensinando-lhes a utilizar uma linguagem adequada como forma de compreenderem e expressarem todo o raciocínio necessário à resolução das tarefas propostas. As justificações ajudam os alunos no futuro a refletirem e a pensar nas atividades com mais cuidado, mesmo que não consigam alcançar todos os resultados pretendidos. K. Yang em (AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015) defende que «A figura construída no *GeoGebra* revelou-se determinante para a formulação de conjecturas e para a resolução das etapas propostas na tarefa, para fomentar a comunicação e a discussão dos argumentos lógico-dedutivos, quer entre os alunos quer entre eles e os professores. Os ambientes de geometria dinâmica potencializam o raciocínio lógico-dedutivo, através da visualização de resultados invariantes perceptíveis pelos movimentos das figuras dinâmicas, quando estas são construídas com base nas propriedades geométricas.»

Para compreensão dos conceitos matemáticos não chega a visualização da figura inicial ou das outras figuras que se obtêm por manipulação ou arrastamento, é importante estimular os alunos a tentarem fazer demonstrações mais formais. A demonstração, na aula de Matemática, poderá decorrer de uma justificação que encerre um raciocínio dedutivo, ou de um contraexemplo que refute a validade de uma dada afirmação. O *GeoGebra* fomenta assim a demonstração como um meio de comunicação na sala de aula.



## 1.3 Integração Curricular da Demonstração : a sua importância no ensino da Matemática

Equacionar a integração curricular da demonstração no ensino da Matemática e a forma como deve ser lecionada tem sido um dos temas mais discutidos nos últimos tempos. Educadores e toda a comunidade matemática consideram importante uma reflexão sobre a demonstração na matemática escolar e a valorização da mesma nos currículos prescritos a nível internacional e nacional. Verifica-se uma reduzida importância da demonstração no currículo da disciplina de matemática quer ao nível do currículo prescritivo: «orientação, sancionada pela administração central, do que deve ser o conteúdo do sistema educativo» (SANTOS; RODRIGUES, 2009), quer ao nível do currículo em ação: «prática real das propostas curriculares» (SANTOS; RODRIGUES, 2009). «Os estudos desenvolvidos com professores neste domínio, à escala internacional, indicam que a maioria dos professores não reserva tempo das suas aulas ao ensino da demonstração. Evidenciam ainda que a maioria dos docentes não encara a demonstração como sendo central na educação matemática, considerando-a adequada apenas a uma minoria de alunos» cita Margarida Rodrigues em (RODRIGUES, 2010) baseando-se em G. Harel, e L. Sowder. No que respeita ao currículo prescrito, o Programa e Metas Curriculares de Matemática do ensino básico e do ensino secundário homologados recentemente, apontam para uma viragem valorizando e muito o raciocínio matemático e a demonstração, em particular: «Em particular, as técnicas de argumentação e de demonstração, que constituem a própria natureza da Matemática, vão sendo, de forma progressiva, requeridas a todos os alunos.» (BIVAR et al., 2013c)

Elvira Santos e Margarida Rodrigues em (SANTOS; RODRIGUES, 2009) afirmam que de acordo com M. Roldão «o currículo é uma construção social e simultaneamente um produto histórico, sendo a necessidade e a intencionalidade características essenciais do currículo. Ou seja, o currículo nasce de necessidades sociais, num dado tempo e contexto e corresponde ao que intencionalmente se espera que a escola faça aprender.» Assim, equacionar a integração curricular da demonstração no ensino da Matemática e a forma como é lecionada é defender que a demonstração é algo que se espera que a escola «faça aprender» e deve constar do currículo do aluno ao longo do seu processo educativo. Em (AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015) os três autores deste artigo afirmam que E. Veloso invoca duas razões para a demonstração matemática estar presente na aula de Matemática:

1. aprender a raciocinar
2. compreender a natureza da Matemática

Já Margarida Rodrigues invoca mais uma vez G. Hanna: «demonstração é um argumento transparente usado para validar uma afirmação, e que tem uma dupla função, a de promover a compreensão e a de convencer.» (RODRIGUES, 2010)

Assim, um dos motivos invocados na justificação da importância da integração curricular da demonstração é a compreensão pelos alunos da natureza da matemática, uma ciência cujos

resultados são comprovados pela demonstração e não pela experimentação, não desvalorizando a experimentação e a intuição na fase inicial da descoberta.

Mais uma vez mencionando o currículo prescritivo, o Programa e Metas Curriculares de Matemática do ensino básico e do ensino secundário, a demonstração deve ser contextualizada em tarefas de carácter investigativo. Os alunos aprendem a demonstrar, a compreender a natureza da matemática e os conceitos pretendidos através das propriedades e relações que estes descobrem na realização das atividades de investigação. E. Veloso em (AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015) defende que abordar a demonstração nas aulas de matemática quer através de tarefas de investigação quer analisando demonstrações, particularmente no ensino secundário, contribui para que os alunos aprendam a raciocinar. Defende ainda que «os alunos devem chegar ao ensino secundário com uma experiência já considerável de atividades de investigação em matemática, durante a qual tiveram numerosas ocasiões para argumentar e demonstrar, e refletir com a ajuda do professor sobre essa experiência matemática . . . Tanto no ensino básico como no secundário, as demonstrações devem ser rigorosas e conter algum simbolismo, mas não tornar-se demasiado formais, devendo privilegiar-se o raciocínio lógico dedutivo e as cadeias argumentativas. » (AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015)

A demonstração surge assim como um instrumento a ser usado para «fazer» Matemática (no sentido da produção de conhecimento) promovendo a compreensão matemática, principal objetivo desta, assim como aumentar a motivação dos alunos nas suas argumentações matemáticas, aumentar a motivação para «fazer» uma demonstração, como defendia De Villiers.

O mote desta tese é explorar as vantagens do *software* de Geometria 3D na compreensão das demonstrações de Matemática em Geometria. Ultimamente muitos educadores e a comunidade matemática em geral veem a importância dos ambientes de geometria dinâmica na sala de aula. O surgimento das novas tecnologias permite a abordagem da Matemática de uma forma mais dinâmica, possibilitando a exploração de tarefas investigativas. Realizando várias experiências os alunos formulam conjecturas e combinam «o trabalho apoiado no uso de tecnologias com o trabalho baseado em papel e lápis , de modo a construírem uma aprendizagem assente numa compreensão mais profunda e sólida dos conceitos, que possa ser geradora de maior motivação, autoestima e empenhamento» (AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015) Com os ambientes de geometria dinâmica os alunos utilizam a sua intuição, formulando e descobrindo conjecturas para posteriormente os demonstrarem com papel e lápis. Ao justificarem, argumentarem os resultados descobertos em sala de aula estes convencem-se e convencem. Em Programa e Metas Curriculares Matemática A — Ensino Secundário temos que «Os alunos devem ser capazes de estabelecer conjecturas, em alguns casos, após a análise de um conjunto de situações particulares, nomeadamente pela exploração das potencialidades dos recursos tecnológicos» (BIVAR et al., 2013a)

R. C. Pietropaolo em (AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015), num estudo feito com educadores de matemática defende que o trabalho feito em sala de aula deve ter em conta as capacidades intelectuais dos alunos. Segundo este autor «os conteúdos curriculares não podem estar fora das capacidades intelectuais dos alunos, sendo necessário, portanto, pensar e pesquisar alternativas para superar dificuldades e chegar inclusive às provas formais.» (AMADO;



[SANCHEZ; PINTO, 2015](#)) O Estatuto do aluno de 2010 refere que as provas de recuperação são substituídas por medidas de diferenciação pedagógica. É dever da escola gerir a heterogeneidade, diferenciar o ensino, permitir que cada aluno desenvolva as suas capacidades ao seu ritmo passando pela seleção de métodos e estratégias adequados a cada situação. Não existem dois alunos iguais e diferenciar o ensino é garantir a diferenciação das aprendizagens. No artigo 24 do Decreto-Lei n.º 55/2018, na avaliação interna das aprendizagens temos no item 2 que «A informação recolhida com finalidade formativa fundamenta a definição de estratégias de diferenciação pedagógica, de superação de eventuais dificuldades dos alunos, de facilitação da sua integração escolar e de apoio à orientação escolar . . . da aprendizagem, com vista ao ajustamento de processos e estratégias.»<sup>1</sup> Segundo o NCTM (2000) os alunos devem ter oportunidade de «reconhecer o raciocínio e a prova como aspetos fundamentais da Matemática; formular e investigar conjecturas matemáticas; desenvolver e avaliar argumentos matemáticos e provas; e selecionar e usar vários tipos de raciocínio e métodos de prova». ([AMADO; SANCHEZ; PINTO, 2015](#)).

## 1.4 Geometria e Demonstração

Nos documentos, Programa e Metas Curriculares de Matemática do ensino básico e do ensino secundário, que identifica as capacidades e conhecimentos que os alunos devem adquirir nos diferentes níveis de ensino, o domínio Geometria e Medida (GM) é trabalhado no 1.º, 2.º e 3.º ciclos, e o domínio Geometria Analítica no 10.º e 11.º anos :

- No 1.º ciclo «São apresentadas as noções básicas da Geometria, começando-se pelo reconhecimento visual de objetos e conceitos elementares como pontos, colinearidade de pontos, direções, retas, semirretas e segmentos de reta, paralelismo e perpendicularidade, a partir dos quais se constroem objetos mais complexos como polígonos, circunferências, sólidos ou ângulos.»
- No 2.º ciclo «Em Geometria, são introduzidos alguns conceitos e propriedades – tão elementares quanto fundamentais . . . », «Tratando-se de uma etapa indispensável ao estudo sério e rigoroso da Geometria nos ciclos de ensino posteriores, os alunos deverão saber relacionar as diferentes propriedades estudadas com aquelas que já conhecem e que são pertinentes em cada situação. É também pedida aos alunos a realização de diversas tarefas que envolvem a utilização de instrumentos de desenho e de medida (régua, esquadro, compasso e transferidor, programas de geometria dinâmica), sendo desejável que adquiram destreza na execução de construções rigorosas e reconheçam alguns dos resultados matemáticos por detrás dos diferentes procedimentos.»
- no 3.º ciclo «Neste mesmo domínio são apresentados alguns teoremas fundamentais, como o teorema de Tales ou de Pitágoras, que é visto, nesta abordagem, como uma consequência do primeiro. O teorema de Tales permite ainda tratar com rigor os critérios de semelhança de triângulos, que estão na base de numerosas demonstrações geométricas

<sup>1</sup> Decreto-lei n.º 55/2018

propostas. Um objetivo geral dedicado à axiomática da geometria permite enquadrar historicamente toda esta progressão e constitui um terreno propício ao desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo dos alunos.»

No domínio GM9, no subdomínio, Axiomatização das teorias Matemáticas, temos o objetivo geral 1 — Utilizar corretamente o vocabulário próprio do método axiomático.

- «O 10<sup>o</sup> ano é igualmente a ocasião para se desenvolver o estudo da Geometria Analítica iniciado no Ensino Básico com a introdução dos referenciais cartesianos, planos ... », No domínio, GA11, Geometria Analítica, introduz-se, no 11<sup>o</sup> ano, a noção geométrica de produto escalar de vetores, deduzindo-se as suas principais propriedades ... »(BIVAR et al., 2013c) e (BIVAR et al., 2013a).

Vemos assim que a Geometria tem um papel de destaque e de grande importância no currículo dos nossos alunos. É na Grécia antiga que a geometria se estabelece como ciência dedutiva. Os gregos tiveram uma influência muito grande no desenvolvimento da Geometria como ciência. Os «Elementos de Euclides» reúnem o conhecimento das matemáticas de seu tempo e a sua maior contribuição está na apresentação axiomática desse conhecimento. Considero que ainda hoje está presente a preocupação de colocar os nossos alunos a raciocinar, demonstrar e deduzir seguindo a metodologia de Euclides. A geometria é um dos campos mais férteis para o desenvolvimento de diferentes formas de raciocínio, em especial o dedutivo. Ana Barbosa em (BARBOSA et al., 2002), cita «a demonstração em Geometria é tida como uma preparação para o raciocínio lógico e defende que a demonstração no ensino da Geometria deve ser encarada como uma atividade matemática escolar que serve para esclarecer ideias, que vale a pena tornar conhecidas dos alunos para promover a compreensão da matemática.» baseada mais uma vez em G. Hanna.

A Geometria a meu ver tem um papel importante na formação matemática dos nossos alunos. Como vimos atrás desde o 1<sup>o</sup> ciclo ao secundário a aprendizagem da Geometria começa de uma forma gradual com a observação do mundo pelo aluno (reconhecimento visual de objetos e conceitos, com a identificação de figuras geométricas, ...), primeiro em objetos concretos e evoluindo ao longo do seu percurso académico para a abstração. O aluno acha interessante, com a ajuda da Geometria poder representar e descrever de maneira ordenada o mundo que o rodeia. Mais tarde, começando já no 9<sup>o</sup> ano, a Geometria como Teoria Axiomática permite o desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo fundamental para o pensamento matemático. A integração curricular da Geometria é assim justificada por potenciar o desenvolvimento do raciocínio matemático com base na elaboração de conjecturas e na realização de raciocínios dedutivos.

## 2 Volume da Pirâmide

A demonstração da fórmula do volume da pirâmide através da área da sua base e respetiva altura não é exigida na planificação do 9.º ano. Pretende-se sim que os «alunos saibam que este resultado pode ser obtido por decomposição de um prisma triangular reto em três pirâmides com o mesmo volume», objetivo do descritor 9.1 das metas curriculares, como é referido no caderno de apoio do ensino básico, (BIVAR et al., 2012). Torna-se substancial demonstrar que duas pirâmides com a mesma base e a mesma altura têm o mesmo volume, utilizando para tal o teorema de Tales e o *Princípio de Cavalieri*. É apresentada uma construção no *GeoGebra* para elucidar o resultado enunciado anteriormente. De seguida é apresentada uma outra construção que também demonstra que as pirâmides obtidas por decomposição de um prisma triangular reto são equivalentes, donde se conclui que o volume da pirâmide é um terço do volume do prisma. Para esta demonstração foram necessários abordar o descritor 5, do objetivo geral 5 — Identificar planos paralelos, retas paralelas e retas paralelas a planos no espaço euclidiano: «Saber que se um plano é concorrente com um de dois planos paralelos então é também concorrente com o outro e reconhecer que as retas interseção do primeiro com cada um dos outros dois são paralelas», e o descritor 7, também do objetivo geral 5 : «Saber que é condição necessária e suficiente para que dois planos (distintos) sejam paralelos que exista um par de retas concorrentes em cada plano, duas a duas paralelas». Foi também abordado o descritor 3: «Saber, dadas duas figuras planas semelhantes, que a medida da área da segunda é igual à medida da área da primeira multiplicada pelo quadrado da razão da semelhança que transforma a primeira na segunda» do domínio GM7 — Geometria e Medida, do subdomínio Medida e do objetivo geral 9 — Relacionar perímetros e áreas de figuras semelhantes. Uma vez demonstrado que o volume de uma pirâmide é um terço do volume do prisma generalizamos este resultado para qualquer pirâmide decompondo essa pirâmide em pirâmides triangulares.

Nas Metas Curriculares do Ensino Básico da disciplina de Matemática é possível ver os seguintes descritores no domínio Geometria e Medida — GM9, no subdomínio Medida e no objetivo geral 9 — Comparar e calcular áreas e volumes, (BIVAR et al., 2013c):

1. Saber que a decomposição de um prisma triangular reto em três pirâmides com o mesmo volume permite mostrar que a medida, em unidades cúbicas, do volume de qualquer pirâmide triangular é igual a um terço do produto da medida, em unidades quadradas, da área de uma base pela medida da altura correspondente.
2. Reconhecer, por decomposição em pirâmides triangulares, que a medida, em unidades cúbicas, do volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto da medida, em unidades quadradas, da área da base pela medida da altura.

**Teorema 1:** *O volume de um prisma é igual ao produto da área da base pela altura.*

A demonstração pode ser consultada em (ANDREEV; SHUVALOVA, 1974) ( página 182).

**Teorema 2:** *O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do volume de um prisma com a mesma base e a mesma altura, ou seja,*

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_{\text{base}} \times h}{3}$$

Para nos auxiliar na demonstração deste teorema vamos basear-nos no seguinte teorema:

**Teorema 3:** *Duas pirâmides com a mesma base e a mesma altura têm o mesmo volume.*

Antes de iniciarmos a demonstração do teorema 2 vamos demonstrar o segundo teorema usando o *Princípio de Cavalieri*, enunciado em baixo (EVES, 1991):

1. se duas figuras planas estão entre duas retas paralelas, e se os comprimentos de dois quaisquer segmentos de reta obtidos pela interseção de qualquer reta paralela às duas primeiras e as figuras planas forem sempre iguais, então as áreas das duas figuras planas também são iguais.
2. se dois sólidos estão incluídos entre dois planos paralelos, e se as áreas de duas quaisquer secções obtidas pela interseção de qualquer plano paralelo aos dois primeiros e os sólidos forem iguais, então o volume dos dois sólidos também é igual.

**Demonstração:** Consideremos a pirâmide de base  $[ABC]$  e vértice  $V$  e o triângulo  $[DEF]$  obtido pela interseção da pirâmide com um plano paralelo à base (ver figura 1).

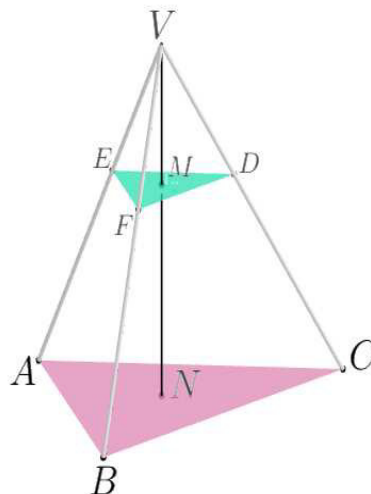


Figura 1 – Pirâmide  $[ABCV]$

Temos que  $DEF$  é paralelo a  $ABC$ , sendo  $[VM]$  a altura da pirâmide  $[DEFV]$  e  $[VN]$  a altura da pirâmide  $[ABCV]$ , onde  $M$  e  $N$  são a projeção de  $V$  sobre os planos  $DEF$  e  $ABC$  respectivamente. O triângulo  $[DEF]$  e o triângulo  $[ABC]$  são semelhantes e a razão de

semelhança é  $\frac{\overline{VM}}{\overline{VN}}$ . A razão entre áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, ou seja,  $\left(\frac{\overline{VM}}{\overline{VN}}\right)^2$ .

Consideremos duas pirâmides com a mesma base  $[ABC]$  e vértices  $V$  e  $G$ , tais que  $\overline{VN} = \overline{GH}$ , onde  $N$  e  $H$  são a projeção de  $V$  e  $G$ , respetivamente, sobre o plano que contém a base (ver figura 2).

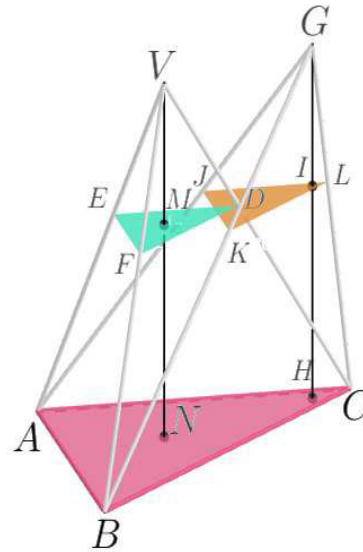


Figura 2 – Pirâmides  $[ABCV]$  e  $[ABCG]$

Sendo  $M$  e  $I$  as projeções de  $V$  e  $G$  sobre um plano paralelo à base temos que  $\overline{VM} = \overline{GI}$ , uma vez que os triângulos  $[JKL]$  e  $[EDF]$  são obtidos por interseção desse plano com as duas pirâmides.

Sejam  $T$  a área do triângulo  $[ABC]$  e  $T_1$  e  $T_2$  as áreas dos triângulos  $[JKL]$  e  $[EDF]$  respetivamente. Temos também que o triângulo  $[JKL]$  é semelhante ao triângulo  $[ABC]$  e a razão de semelhança é  $\frac{\overline{GI}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{VM}}{\overline{VN}}$ . Então,

$$\frac{T_1}{T} = \frac{T_2}{T} = \left(\frac{\overline{VM}}{\overline{VN}}\right)^2$$

Donde,  $T_1 = T_2$ .

Assim, quaisquer dois triângulos obtidos pela interseção de um plano paralelo à base e as duas pirâmides iniciais têm áreas iguais. Pelo *Princípio de Cavalieri* os volumes das duas pirâmides também são iguais. c.q.d.

Esta demonstração foi baseada na demonstração apresentada em (RIBEIRO, 2015). As construções das figuras 1 e 2 podem ser consultadas no CD disponibilizado com o nome de Piramidesmesmabase.

A seguir é apresentada outra construção ilustrativa do teorema 3 (ver construção Piramidesmabase2 no CD).

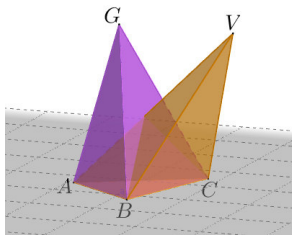


Figura 3 – Pirâmides  
[ABCV] e  
[ABCG]  
 $G \neq V$

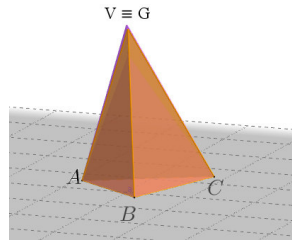


Figura 4 – Pirâmides  
[ABCV] e  
[ABCG]  
 $G = V$

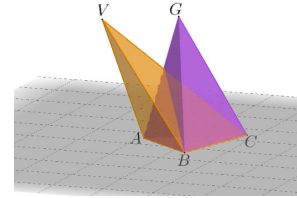


Figura 5 – Pirâmides  
[ABCV] e  
[ABCG]  
 $G \neq V$

As pirâmides [ABCV] e [ABCG] têm a mesma base e a mesma altura logo têm o mesmo volume. (Ver figuras 3, 4 e 5). Na figura 4,  $V$  coincide com  $G$ .

Voltemos agora à demonstração do teorema 2.

**Definição 1:** Duas figuras no plano dizem-se equivalentes se têm a mesma área.

**Definição 2:** Dois sólidos geométricos dizem-se equivalentes se têm o mesmo volume.

Consideremos uma pirâmide [ABCD] de altura  $h$  (ver figura 6).

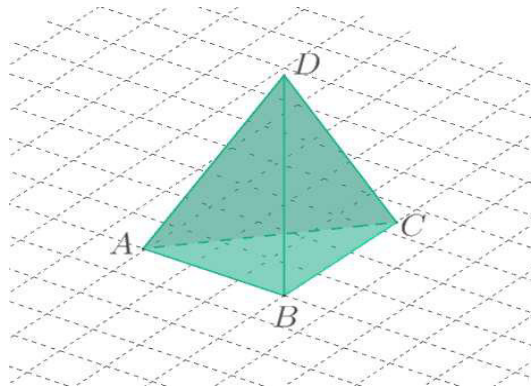


Figura 6 – Pirâmide [ABCD]

Sobre a base [ABC] da pirâmide [ABCD] vamos construir um prisma cuja altura seja igual a  $h$  e tal que uma das arestas laterais coincida com a aresta [BD] da pirâmide (ver figura 7).

Se retirarmos a pirâmide [ABCD] obtemos a pirâmide quadrangular [ACEFD] (ver figura 8).

Traçando o plano ADE é possível obter outras duas pirâmides [ADEF] e [ACDE] como se pode ver nas figuras 10 e 11.

Pelo teorema 1 enunciado em cima, sabemos que  $V_{\text{prisma}} = A_{[ABC]} \times h$ .

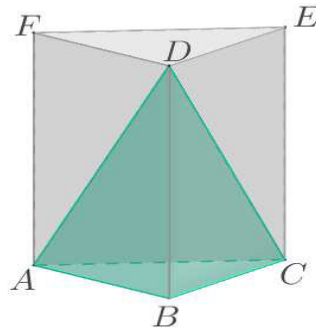


Figura 7 – Prisma  $[ABCDEF]$  e Pirâmide  $[ABCD]$

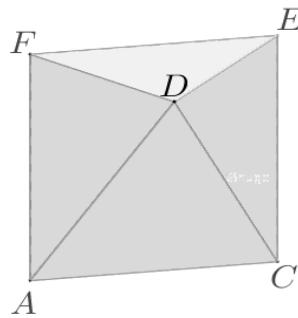


Figura 8 – Pirâmide quadrangular  $[ACEFD]$

Sejam  $V_1$  o volume da pirâmide  $[ABCD]$ ,  $V_2$  o volume da pirâmide  $[ADEF]$  e  $V_3$  o volume da pirâmide  $[ACDE]$ . A base  $[ABC]$  da pirâmide  $[ABCD]$  é igual à base  $[DEF]$  da pirâmide  $[ADEF]$  pois são as bases do prisma. A altura destas duas pirâmides é igual à altura do prisma, logo o volume destas duas pirâmides é igual, pelo teorema 3. Provemos agora que o volume da pirâmide  $[ACDE]$  é igual ao volume das outras duas. Consideremos uma pirâmide  $[ACEG]$ , onde  $G \in [DB]$ , representada na figura 12.

Temos que o segmento  $[DB]$  é paralelo à face  $[ACEF]$  (os triângulos das bases do prisma são iguais, logo a altura relativa ao vértice  $D$  é igual à altura relativa ao vértice  $B$ ). Assim a distância de qualquer ponto de  $[DB]$  a  $[ACEF]$  não depende do ponto. Quando  $G$  coincide com  $D$  temos a pirâmide  $[ACED]$  e quando  $G$  coincide com  $B$  temos a pirâmide  $[ABCE]$  (figuras 13 e 14) que são equivalentes às pirâmides  $[ABCD]$  e  $[ADEF]$ .

As pirâmides  $[ACED]$  e  $[ABCE]$  são equivalentes, pelo Teorema 3, têm a mesma base  $[ACE]$  e a mesma altura,  $[DE] = [BC]$  (as distâncias de  $D$ ,  $G$  e  $B$  até a face  $[ACEF]$  são iguais). As pirâmides  $[ABCE]$  e  $[ADEF]$  têm as bases iguais,  $[ABC] = [EFD]$ , sendo estas também as bases do prisma, e as suas alturas correspondem à altura do prisma. Logo, também pelo teorema 3 podemos afirmar que estas pirâmides são equivalentes. Já provamos que as pirâmides  $[ABCD]$  e  $[ADEF]$  têm o mesmo volume, logo podemos concluir que as três pirâmides têm o mesmo volume. Vimos assim que o prisma  $[ABCDEF]$  foi decomposto em três pirâmides equivalentes e como,  $V_{\text{prisma}} = A_{[ABC]} \times h$ , pelo teorema 1, temos que

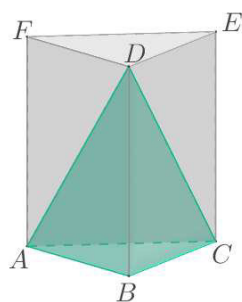


Figura 9 – Pirâmide [ABCD]

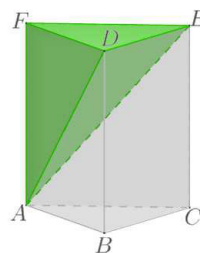


Figura 10 – Pirâmide [ADEF]

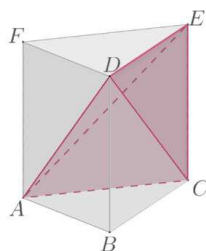


Figura 11 – Pirâmide [ACDE]

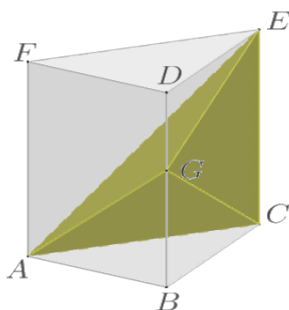


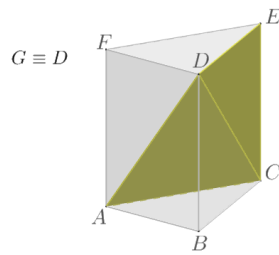
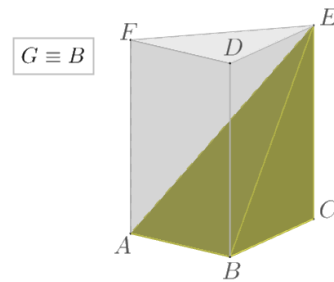
Figura 12 – Pirâmide [ACEG]

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_{[ABC]} \times h}{3}, \text{ c.q.d.}$$

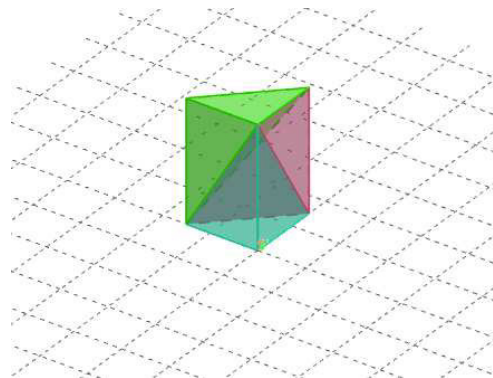
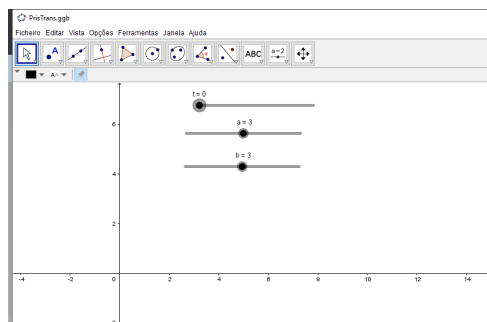
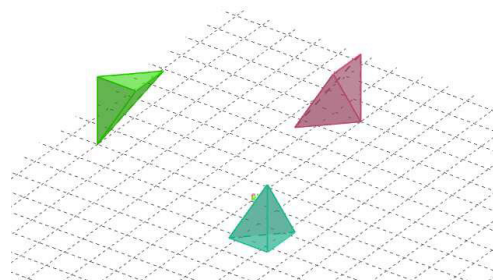
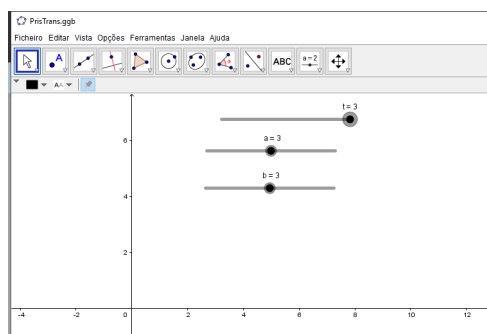
Esta demonstração foi baseada em (EVES, 1991) e (RIBEIRO, 2015). As construções das figuras 6 e 7 (que é igual à 9) podem ser consultadas no CD com o nome Pir1, a construção da figura 8 com o nome de Priscort, a construção da figura 10 com o nome Pir2 e a da figura 11 com o nome de Pir3. As construções das figuras 12, 13 e 14 podem ser consultadas com o nome de Pir4.

A seguir apresento uma última construção que também permite visualizar o prisma reto decomposto em três pirâmides. Depois da visualização ou construção destas figuras pelo aluno, o professor pode desafiar os alunos a demonstrar que as três pirâmides são equivalentes. Nesta construção facilmente se demonstra que a pirâmide verde é equivalente à azul. Com o



Figura 13 – Pirâmide  $[ACED]$ Figura 14 – Pirâmide  $[ABCE]$ 

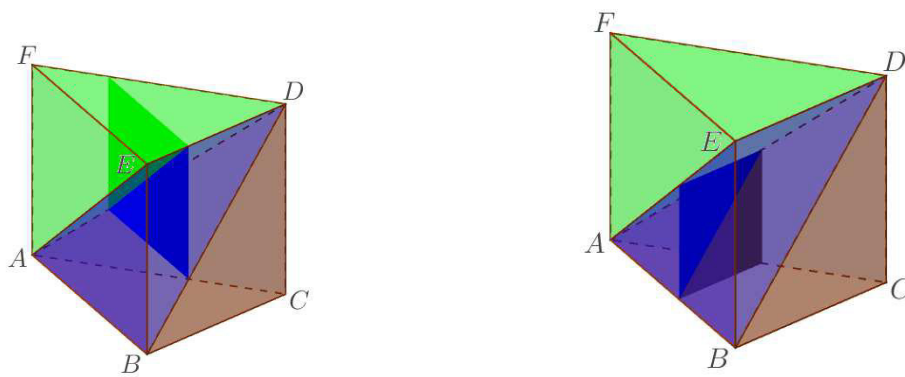
auxílio da construção relativa à figura 12 demonstramos que a pirâmide rosa é equivalente às pirâmides verde e azul.

Figura 15 – Prisma triangular dividido em três pirâmides equivalentes com o seletor  $t = 0$ Figura 16 – Pirâmides equivalentes resultantes da decomposição do prisma triangular em três pirâmides com o seletor  $t \neq 0$ 

Na figura 15 colocando o seletor  $t$  com  $t = 0$  visualizamos o prisma triangular reto dividido em três pirâmides equivalentes (pirâmides azul, verde e rosa). Na figura 16 colocando o seletor  $t$ , com  $t \neq 0$ , visualizamos as três pirâmides «afastadas» do prisma triangular.

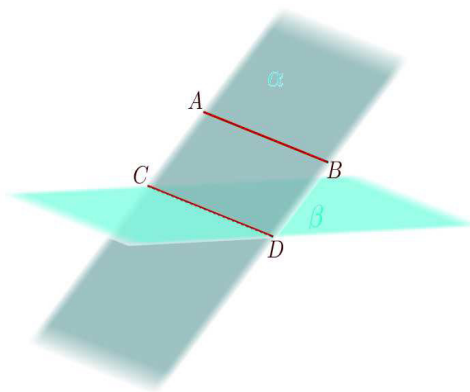
Esta construção pode ser consultada no CD com o nome de *PrisPir*.

Em baixo é apresentada outra construção, que pode ser consultada no CD disponibilizado com o nome de *volpiramide*, que também demonstra que se decomposermos um prisma em três pirâmides, essas pirâmides são equivalentes. (ver figura 17)

Figura 17 – Prisma triangular  $[ABCDEF]$ 

Antes de apresentarmos esta demonstração consideremos os seguintes resultados.

**Teorema 4:** *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois planos concorrentes. Dada uma reta  $AB \subset \alpha$  tal que  $AB \parallel \beta$ , então a reta de intersecção dos dois planos é paralela à reta  $AB$ .*

Figura 18 – Planos concorrentes  $\alpha$  e  $\beta$ 

**Demonstração:** Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois planos concorrentes e uma reta  $AB \subset \alpha$  tal que  $AB \parallel \beta$  e seja  $CD$  a reta de intersecção dos dois planos (ver figura 18). Se  $AB$  e  $CD$  fossem concorrentes então  $AB$  e  $\beta$  também seriam concorrentes, o que é impossível, uma vez que por hipótese  $AB \parallel \beta$ . Segue que as retas  $CD$  e  $AB$ , que estão no mesmo plano, nunca se encontram, ou seja,  $AB \parallel CD$ . (ANDREEV; SHUVALOVA, 1974) c.q.d.

**Teorema 5:** *Se duas retas concorrentes num plano  $\alpha$  são paralelas a outras duas retas concorrentes num plano  $\beta$ , então os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são paralelos.*

**Demonstração:** Sejam  $AB$  e  $BC$  duas retas concorrentes num plano  $\alpha$  e  $DE$  e  $EF$  duas retas concorrentes num plano  $\beta$  tais que  $AB \parallel DE$  e  $BC \parallel EF$  (ver figura 19). Então,  $AB \parallel \beta$  e  $BC \parallel \beta$ . Se  $\alpha$  e  $\beta$  não fossem paralelos então intersectar-se-iam numa reta  $GH$ . Pelo teorema 4, teríamos  $AB \parallel GH$  e  $BC \parallel GH$ , isto é, teríamos duas retas  $AB$  e  $BC$  paralelas a  $GH$  e a passar num mesmo ponto  $B$ , o que é impossível. Segue então que  $\alpha \parallel \beta$ . (ANDREEV; SHUVALOVA, 1974) c.q.d.

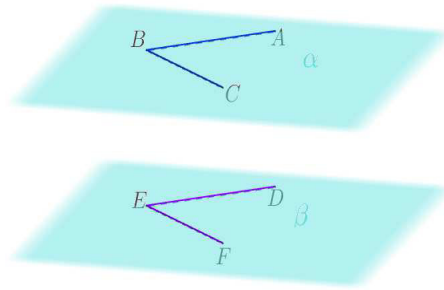


Figura 19 – Planos paralelos  $\alpha$  e  $\beta$

**Teorema 6:** Se um plano  $\delta$  é concorrente com dois planos paralelos  $\alpha$  e  $\beta$ , as retas  $AB$  e  $CD$  obtidas da interseção de  $\delta$  com  $\alpha$  e de  $\delta$  com  $\beta$ , respectivamente, são paralelas.

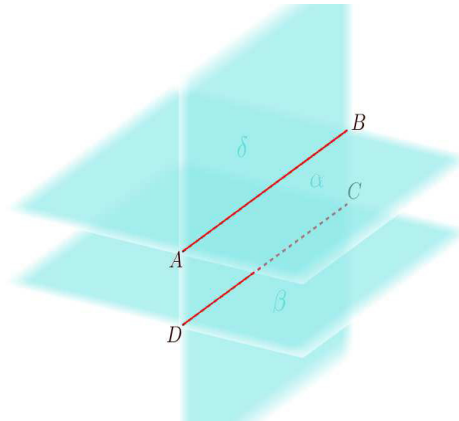


Figura 20 – Plano  $\delta$  concorrente com os planos  $\alpha$  e  $\beta$

**Demonstração:** Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois planos paralelos e  $\delta$  um plano que intersesta estes dois. Sejam  $AB$  a reta de interseção de  $\delta$  com  $\alpha$  e  $CD$  a reta de interseção de  $\delta$  com  $\beta$  (ver figura 20). Suponhamos que  $AB$  e  $CD$  não são paralelas. Então  $P$  é um ponto comum às duas retas, uma vez que estão contidas no mesmo plano  $\delta$ . Mas então  $P$  também pertence a  $\alpha$  e a  $\beta$ , o que é absurdo, uma vez que contraria o paralelismo destes dois planos. (ANDREEV; SHUVALOVA, 1974) e (BIVAR et al., 2012).

Este último resultado é o descritor 5 do objetivo geral 5 — Identificar planos paralelos, retas paralelas e retas paralelas a planos no espaço euclidiano, do subdomínio — Paralelismo e perpendicularidade de retas e planos e do domínio Medida — GM9.

**Teorema 7:** Dois ângulos com os lados correspondentes paralelos e com a mesma direção são iguais.

**Demonstração:** Sejam  $AB$  e  $BC$  duas retas concorrentes num plano  $\alpha$  e  $DE$  e  $EF$  duas retas concorrentes num plano  $\beta$ , tais que  $AB \parallel ED$  e  $BC \parallel EF$  (ver figura 21). Pelo teorema 5  $\alpha \parallel \beta$ . Consideremos segmentos  $[GB]$ ,  $[HE]$ ,  $[BI]$  e  $[EJ]$  nos lados dos ângulos  $\angle ABC$  e  $\angle DEF$  tais

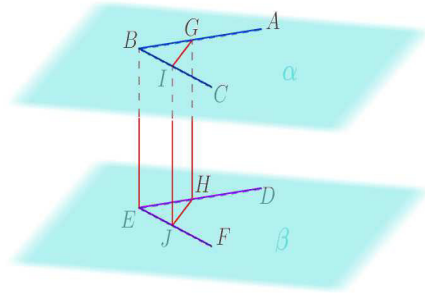


Figura 21 – Ângulos  $\angle ABC$  e  $\angle DEF$  com os lados correspondentes paralelos e com a mesma direção

que  $[GB] = [HE]$  e  $[BI] = [EJ]$  e tracemos os segmentos  $[BE]$ ,  $[IJ]$ ,  $[GH]$ ,  $[GI]$  e  $[HJ]$ . Como  $BG = EH$  e  $BG \parallel HE$ , temos que  $GH = BE$  e  $GH \parallel BE$ , uma vez que  $[BEHG]$  é um paralelogramo. Análogamente se demonstra que  $[IJ] = [BE]$  e  $[IJ] \parallel [BE]$ . Segue que  $[GH] = [IJ]$  e  $[GH] \parallel [IJ]$ , donde  $[GI] = [HJ]$ . Temos assim que  $\triangle[BIG] \equiv \triangle[EJH]$ , uma vez que têm os três lados iguais. Podemos então concluir que  $\angle ABC = \angle DEF$ . (ANDREEV; SHUVALOVA, 1974) c.q.d.

As construções das figuras 18, 19, 20 e 21 podem ser consultadas no CD com o nome de Planos Concorrentes, Planos Paralelosb, Planos Paralelosa e Planos Paralelosc, respectivamente.

**Teorema 8:** Se uma pirâmide é interseçada por um plano paralelo à base, então:

1. as arestas laterais e a altura da pirâmide são divididas pelo plano em partes proporcionais;
2. a secção obtida por essa intersecção é um polígono semelhante ao polígono da base;
3. A razão entre a área do polígono da secção e a área do polígono da base é igual à razão entre o quadrado da distância do vértice da pirâmide à secção e o quadrado da distância do vértice da pirâmide à base.

**Demonstração:** Sejam  $[V_1DEFGHI]$  uma pirâmide interseçada por um plano paralelo à base,  $[NOPQRS]$  a secção obtida por essa intersecção,  $[V_1M_2]$  a altura da pirâmide e  $[V_1M_1]$  a altura correspondente à pirâmide  $[V_1NOPQRS]$  obtida também por essa intersecção. (ver figura 22)

1. Como o plano da secção é paralelo ao plano da base temos, pelo teorema 6, que

$$[NS] \parallel [DI], [SR] \parallel [IH], [RQ] \parallel [HG], [QP] \parallel [GF], [PO] \parallel [FE], [ON] \parallel [ED].$$

Pelo teorema de Tales temos que,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{V_1N}}{\overline{ND}} &= \frac{\overline{V_1S}}{\overline{SI}}; \frac{\overline{V_1S}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{V_1R}}{\overline{RH}}; \frac{\overline{V_1R}}{\overline{RH}} = \frac{\overline{V_1Q}}{\overline{QG}}; \frac{\overline{V_1Q}}{\overline{QG}} = \frac{\overline{V_1P}}{\overline{PF}} \\ \frac{\overline{V_1P}}{\overline{PF}} &= \frac{\overline{V_1O}}{\overline{OE}}; \frac{\overline{V_1O}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{V_1N}}{\overline{ND}}; \frac{\overline{V_1M_1}}{\overline{M_1M_2}} = \frac{\overline{V_1N}}{\overline{ND}}; \end{aligned}$$

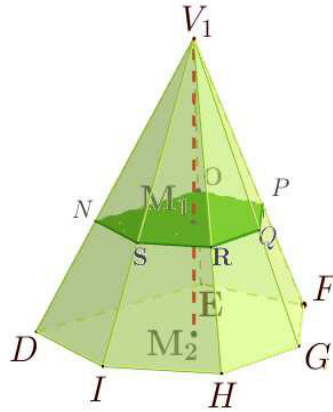


Figura 22 – Pirâmide  $[V_1DEFGHI]$

Então,

$$\frac{\overline{V_1N}}{\overline{ND}} = \frac{\overline{V_1S}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{V_1R}}{\overline{RH}} = \frac{\overline{V_1Q}}{\overline{QG}} = \frac{\overline{V_1P}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{V_1O}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{V_1N}}{\overline{ND}} = \frac{\overline{V_1M_1}}{\overline{M_1M_2}};$$

2. Como

$$[NS] \parallel [DI], [SR] \parallel [IH], [RQ] \parallel [HG], [QP] \parallel [GF], [PO] \parallel [FE], [ON] \parallel [ED]$$

temos, pelo teorema 7

$$\begin{aligned} \angle NSR &= \angle DIH; \angle SRQ = \angle IHG; \angle RQP = \angle HGF; \\ \angle QPO &= \angle GFE; \angle PON = \angle FED; \angle ONS = \angle EDI \end{aligned}$$

Assim, pelo teorema dos triângulos semelhantes, temos que

$$\frac{\overline{NS}}{\overline{DI}} = \frac{\overline{V_1N}}{\overline{V_1D}} = \frac{\overline{V_1S}}{\overline{V_1I}}; \frac{\overline{SR}}{\overline{IH}} = \frac{\overline{V_1S}}{\overline{V_1I}} = \frac{\overline{V_1R}}{\overline{V_1H}}; \frac{\overline{RQ}}{\overline{HG}} = \frac{\overline{V_1R}}{\overline{V_1H}} = \frac{\overline{V_1Q}}{\overline{V_1G}};$$

e

$$\frac{\overline{QP}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{V_1Q}}{\overline{V_1G}} = \frac{\overline{V_1P}}{\overline{V_1F}}; \frac{\overline{PO}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{V_1P}}{\overline{V_1F}} = \frac{\overline{V_1O}}{\overline{V_1E}}; \frac{\overline{ON}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{V_1O}}{\overline{V_1E}} = \frac{\overline{V_1N}}{\overline{V_1D}};$$

Segue que

$$\frac{\overline{NS}}{\overline{DI}} = \frac{\overline{SR}}{\overline{IH}} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{HG}} = \frac{\overline{QP}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{PO}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{ED}}.$$

Assim o polígono  $[DEFGHI]$  que constitui a base e o polígono  $[NOPQRS]$  que constitui a secção têm lados proporcionais e ângulos iguais, logo são semelhantes.

3. Como a razão das áreas de polígonos semelhantes é igual à razão dos correspondentes lados ao quadrado, temos que

$$\frac{\text{área}[NOPQRS]}{\text{área}[DEFGHI]} = \frac{\overline{NS}^2}{\overline{DI}^2}.$$

Ora como,

$$\frac{\overline{NS}}{\overline{DI}} = \frac{\overline{V_1N}}{\overline{V_1D}} = \frac{\overline{V_1M_1}}{\overline{V_1M_2}},$$

temos que

$$\frac{\text{área}[NOPQRS]}{\text{área}[DEFGHI]} = \frac{\overline{V_1M_1}^2}{\overline{V_1M_2}^2} = \left( \frac{\overline{V_1M_1}}{\overline{V_1M_2}} \right)^2$$

(ANDREEV; SHUVALOVA, 1974)

c.q.d.

**Teorema 9:** Se duas pirâmides com igual altura, com a base no mesmo plano e os vértices contidos numa reta paralela às suas bases são intersecadas por um plano paralelo à base e a uma distância igual a partir dos seus vértices, as áreas das bases das pirâmides e as áreas das secções obtidas por essa intersecção são proporcionais.

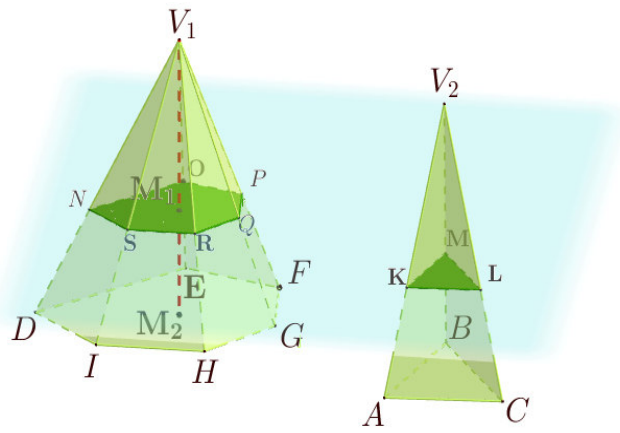


Figura 23 – Pirâmides  $[V_1DEFGHI]$  e  $[V_2ABC]$

**Demonstração:** Consideremos duas pirâmides  $[V_1DEFGHI]$  e  $[V_2ABC]$ , num plano  $\beta$ , com os seus vértices contidos numa reta paralela às suas bases e com igual altura  $h_2$  intersecadas por um plano  $\alpha$  a uma distância  $h_1$  dos seus vértices (ver figura 23). As secções obtidas por essa intersecção são, neste exemplo, um hexágono e um triângulo. Pretendemos provar que as áreas destes polígonos são proporcionais às áreas dos polígonos das bases. Pelo teorema anterior,

$$\frac{\text{área}[NOPQRS]}{\text{área}[DEFGHI]} = \frac{h_1^2}{h_2^2} \text{ e } \frac{\text{área}[KLM]}{\text{área}[ABC]} = \frac{h_1^2}{h_2^2}.$$

Donde,

$$\frac{\text{área}[NOPQRS]}{\text{área}[DEFGHI]} = \frac{\text{área}[KLM]}{\text{área}[ABC]}.$$

c.q.d.

(ANDREEV; SHUVALOVA, 1974)

**Corolário 1:** Se duas pirâmides com igual altura com a base no mesmo plano e os vértices contidos numa reta paralela às suas bases têm bases equivalentes, então as secções obtidas por intersecção de um plano paralelo à base e essas pirâmides também são equivalentes.  
(ANDREEV; SHUVALOVA, 1974)

As construções no *GeoGebra* das figuras 22 e 23 podem ser consultadas no CD disponibilizado com o nome Pirâmides.

Voltemos ao nosso objetivo: Demonstrar que com a construção da figura 17 também conseguimos visualizar o seguinte resultado: Dado um prisma qualquer se o decomposermos em três pirâmides obtemos pirâmides equivalentes.

Seja  $[ABCDEF]$  um prisma triangular. Se traçarmos um plano qualquer paralelo à face  $[ABEF]$  obtemos dois triângulos resultantes da interseção desse plano com as pirâmides verde e azul (pirâmides  $[AEFD]$  e  $[AEBD]$ ). Os triângulos da base das pirâmides verde e azul são equivalentes pois têm a mesma base e a mesma altura. Pelo corolário 1 os dois triângulos anteriores obtidos da interseção do plano com as pirâmides também são equivalentes. Pelo *Princípio de Cavalieri* o volume das duas pirâmides é igual. De forma análoga se demonstra que as pirâmides azul e castanha (pirâmides  $[BDEA]$  e  $[BCDA]$ ) também são equivalentes. Temos assim demonstrado que as três pirâmides verde, azul e castanha resultantes da decomposição do prisma triangular são equivalentes.

Através do teorema 2 provamos que o volume de uma pirâmide triangular é um terço do volume de um prisma com a mesma base e a mesma altura.

Vamos agora generalizar este resultado para uma pirâmide qualquer. A demonstração deste resultado foi baseada em (BIVAR et al., 2012) consultando o exemplo 9.2 das Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática – Caderno de Apoio do 3.º Ciclo. Trata-se de um exercício simples que pode ser proposto aos alunos: Utilizando uma decomposição em pirâmides triangulares, verifica que o volume da pirâmide quadrangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura. Com este exercício trabalha-se o descritor 2 — «Reconhecer, por decomposição em pirâmides triangulares, que a medida, em unidades cúbicas, do volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto da medida, em unidades quadradas, da área da base pela medida da altura», do objetivo geral 9 — Comparar e calcular áreas e volumes, do subdomínio — Medida, e do domínio GM9.

**Teorema 10:** *O volume de uma pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

**Demonstração:** Consideremos uma pirâmide de base poligonal  $[A_1A_2A_3\dots A_n]$  com  $n \in \mathbb{N}$  e vértice  $V$ . É possível decompor esta pirâmide em várias pirâmides triangulares com o vértice comum. Se traçarmos as diagonais da base a partir de um dos seus vértices obtemos uma decomposição do polígono que constitui a sua base em  $n - 2$  triângulos  $[A_1A_2A_3]$ ,  $[A_1A_3A_4]$ ,  $\dots$ ,  $[A_1A_{n-1}A_n]$ . Cada um dos triângulos é a base de uma pirâmide de vértice  $V$ , igual ao da pirâmide dada. Temos, assim, uma decomposição da pirâmide inicial em  $n - 2$  pirâmides com igual altura,  $h$ . O volume  $V$  desta pirâmide é igual à soma dos volumes  $V_1, V_2, \dots, V_{n-2}$  das pirâmides de bases  $[A_1A_2A_3], [A_1A_3A_4], \dots, [A_1A_{n-1}A_n]$ , respetivamente, ou seja,

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_{n-2}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} V = V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-2} &\iff V = \frac{A_{[A_1 A_2 A_3]} \times h}{3} + \frac{A_{[A_1 A_3 A_4]} \times h}{3} + \cdots + \frac{A_{[A_1 A_{n-1} A_n]} \times h}{3} \\ &\iff V = \frac{(A_{[A_1 A_2 A_3]} + A_{[A_1 A_3 A_4]} + \cdots + A_{[A_1 A_{n-1} A_n]}) \times h}{3} \end{aligned}$$

Temos que,

$$A_{[A_1 A_2 \dots A_n]} = A_{[A_1 A_2 A_3]} + A_{[A_1 A_3 A_4]} + \cdots + A_{[A_1 A_{n-1} A_n]}$$

Donde,

$$V = \frac{A_{[A_1 A_2 \dots A_n]} \times h}{3}, \text{ ou seja } V = \frac{1}{3} \times A_{base} \times h.$$

Temos assim que para qualquer pirâmide,

$$V_{pirâmide} = \frac{A_{[ABC]} \times h}{3}, \text{ c.q.d.}$$

No meu exemplo resolvi considerar uma pirâmide pentagonal (ver construção Pirpent no CD disponibilizado).

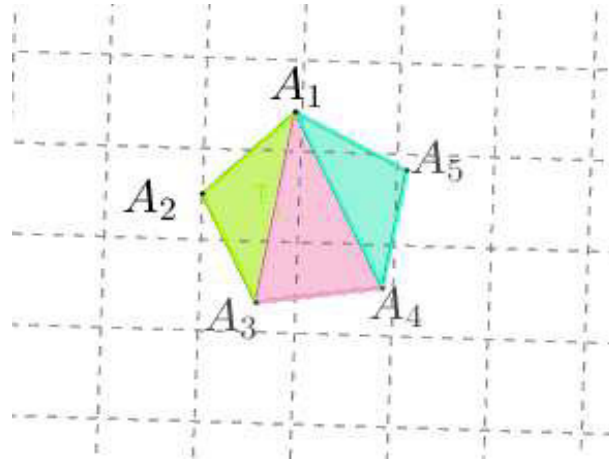


Figura 24 – Base pentagonal da Pirâmide  $[A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 V]$  dividida em três triângulos

Se decomposermos a base  $[A_1 A_2 A_3 A_4 A_5]$  (ver figura 24) em três triângulos obtemos três pirâmides triangulares com o mesmo vértice  $V$  e bases  $[A_1 A_2 A_3]$ ,  $[A_1 A_3 A_4]$  e  $[A_1 A_4 A_5]$  (ver figura 26). Na folha gráfica 2D colocar o seletor  $t$  com  $t = 0$ . Na construção da figura 28) é possível visualizar melhor essa decomposição. Nesta construção na folha gráfica 2D temos o seletor  $t$  com  $t \neq 0$ .



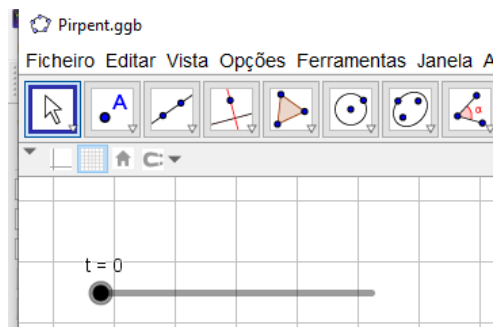


Figura 25 – seletor  $t$  com  $t = 0$

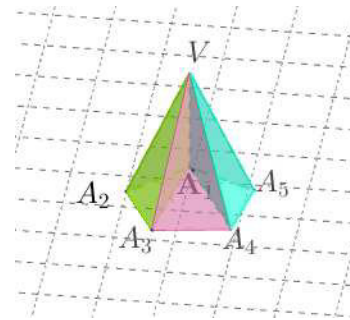


Figura 26 – Pirâmide  
pentagonal  
 $[A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 V]$

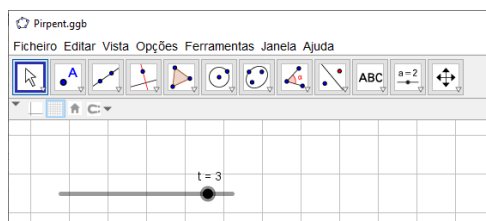


Figura 27 – seletor  $t$  com  $t \neq 0$

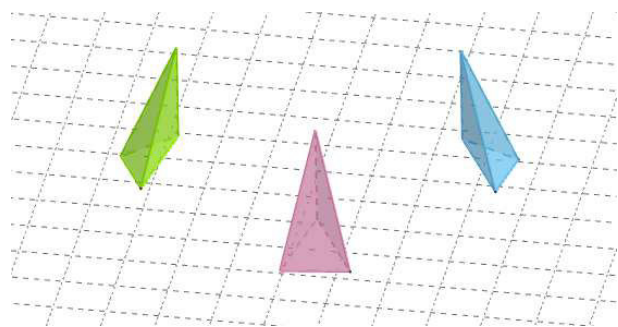


Figura 28 – Pirâmides resultantes da decompo-  
sição da base pentagonal da Pirâ-  
mide  $[A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 V]$  em três triân-  
gulos



## 3 Volume do Cone, Volume da Esfera

### 3.1 Volume do Cone

Citando mais uma vez as Metas temos o descritor 9.3 do domínio Geometria e Medida — GM9, do subdomínio, Medida, e do objetivo geral 9 — Comparar e calcular áreas e volumes (BIVAR et al., 2013c) — «Saber que a medida, em unidades cúbicas, do volume de um cone é igual a um terço do produto da medida, em unidades quadradas, da área da base pela medida da altura, por se poder aproximar por volumes de pirâmides de bases inscritas e circunscritas à base do cone e o mesmo vértice». Assim, neste capítulo iremos trabalhar o seguinte: tendo conhecimento do volume da pirâmide, o volume do cone aproxima-se por volumes de pirâmides de bases inscritas e circunscritas à base do cone à medida que aumentamos o número de lados dos polígonos inscritos e circunscritos na base do cone.

**Definição 3:** Um polígono diz-se regular se for convexo e se tiver todos os seus lados e todos os seus ângulos iguais.

**Definição 4:** Uma pirâmide diz-se reta se a projeção ortogonal do seu vértice coincide com o baricentro do polígono que constitui a sua base.

Não vou definir baricentro porque só vou trabalhar com polígonos regulares onde é claro o que é o baricentro.

**Definição 5:** Uma pirâmide diz-se regular se for reta e se o polígono que constitui a sua base for regular.

**Definição 6:** Diz-se que uma pirâmide está inscrita num cone se o polígono que constitui a sua base está inscrito na base circular do cone e se o vértice da pirâmide coincide com o vértice do cone.

**Definição 7:** Diz-se que uma pirâmide está circunscrita num cone se o polígono que constitui a base da pirâmide está circunscrito na base circular do cone e se o vértice da pirâmide coincide com o vértice do cone.

Consideremos um cone de vértice  $V$  e nele inscritas várias pirâmides poligonais regulares com vértices em  $V$ . À medida que o número de lados do polígono da base das pirâmides aumenta, o volume do cone aproxima-se cada vez mais do volume das pirâmides. Isto é visível nas construções das figuras 29 e 30. (ver construção Cone no CD disponibilizado).

Consideremos agora pirâmides poligonais regulares com o mesmo vértice  $V$  e cujas bases estão circunscritas à base do cone. Verificamos também que à medida que o número de lados do polígono da base destas pirâmides aumenta, o volume do cone aproxima-se cada

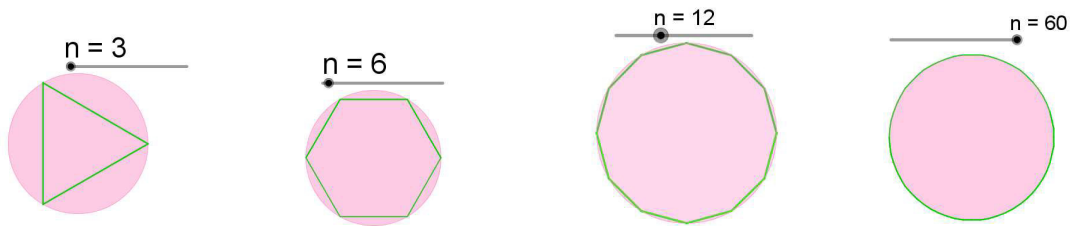


Figura 29 – Polígonos inscritos na base de um cone

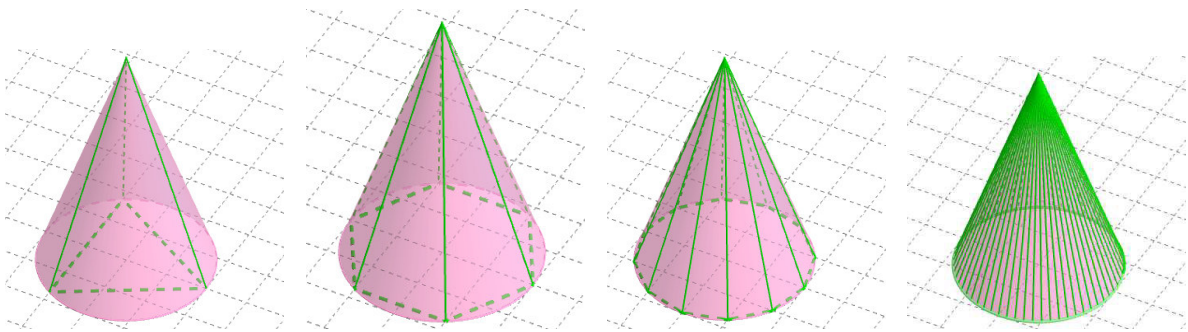


Figura 30 – Pirâmides inscritas num cone

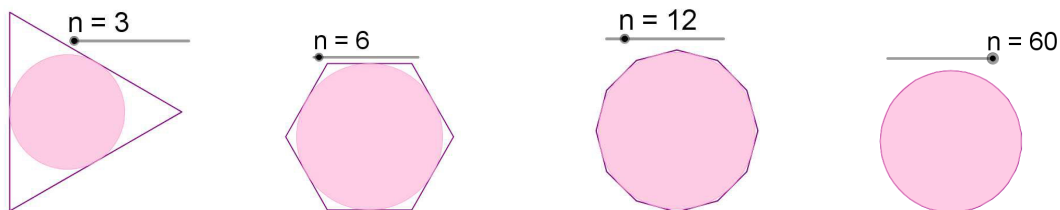


Figura 31 – Polígonos circunscritos na base de um cone

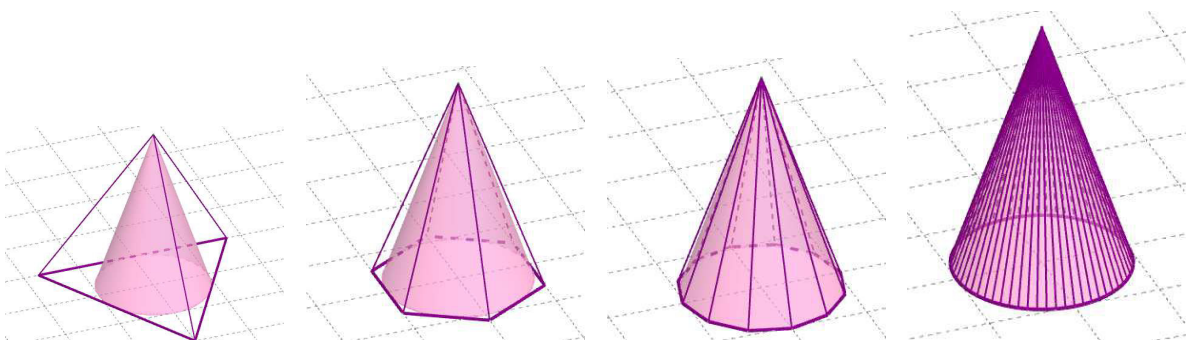


Figura 32 – Pirâmides circunscritas num cone

vez mais do volume das pirâmides. Observando as construções das figuras 31 e 32 podemos constatar isto.

A área da base do cone está entre as áreas dos polígonos inscritos e circunscritos. À medida que o número de lados das pirâmides aumenta a diferença entre as áreas tende para zero. Observemos as construções das figuras 33 e 34.

Como o cone e a pirâmide têm a mesma altura, o volume do cone aproxima-se por volumes de pirâmides de bases inscritas e circunscritas à base do cone à medida que aumentamos o número de lados dos polígonos inscritos e circunscritos na base do cone. Temos assim que,

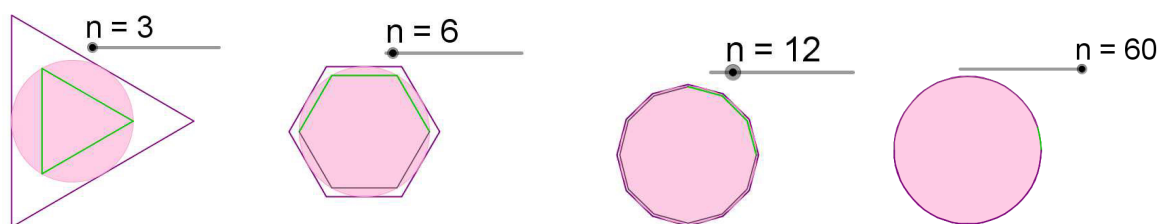


Figura 33 – Polígonos inscritos e circunscritos na base de um cone

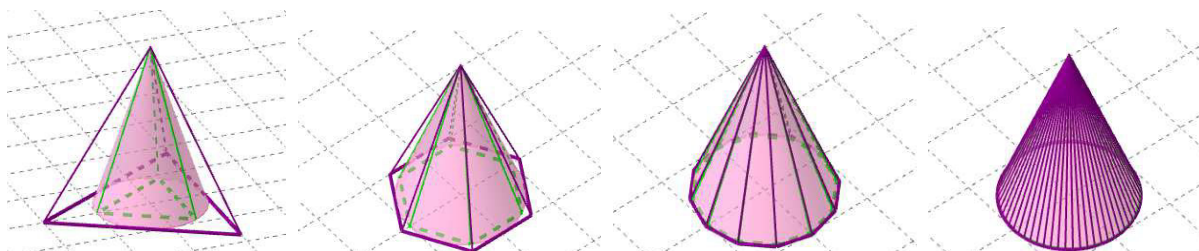


Figura 34 – Pirâmides inscritas e circunscritas num cone

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times A_b \times h, \text{ c. q d.}$$

([ANDREEV; SHUVALOVA, 1974](#))

## 3.2 Volume da Esfera

Ainda no domínio Geometria e Medida — GM9, no subdomínio, Medida, e no objetivo geral 9 — Comparar e calcular áreas e volumes — o descritor 9.4. refere que o aluno deve: «Saber que a medida, em unidades cúbicas, do volume de uma esfera é igual a  $\frac{4}{3} \times \pi \times R^3$ , onde  $R$  é o raio da esfera.» ([BIVAR et al., 2013c](#))

Através do *Princípio de Cavalieri* verificamos que as suas hipóteses são verificadas para uma semiesfera de raio  $R$  e um sólido que se obtém retirando a um cilindro, com altura e raio da base ambos iguais a  $R$ , um cone com a base coincidente com uma das bases do cilindro e o vértice no centro da outra base. Podemos assim concluir que o volume da semiesfera é igual ao volume deste novo sólido podendo deduzir daqui o volume da esfera. A demonstração seguinte, extraída de ([ANDREEV; SHUVALOVA, 1974](#)), e a construção, que pode ser visualizada no CD disponibilizado com o nome de Esfera, complementam a ideia referida atrás.

**Teorema 11:** O volume da esfera é igual a  $\frac{4}{3} \times \pi \times R^3$ , sendo  $R$  o raio da esfera.

**Demonstração:** Consideremos uma semiesfera de raio  $R$  e um cilindro, com as bases na vertical, com altura e raio da base ambos iguais a  $R$ , tal que a base inferior do cilindro e o maior círculo da semiesfera estão num plano  $\alpha$ . Consideremos um cone com a base coincidente com a base superior do cilindro e o vértice,  $O$ , coincidente com o centro da outra base (ver figura 35). Seja  $\beta$  um plano qualquer, paralelo a  $\alpha$ , a uma distância  $d$  de  $\alpha$ . Este plano  $\beta$  secciona a semiesfera gerando um círculo de raio  $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ , cuja área é  $\pi \times r^2 = \pi \times (R^2 - d^2)$ .

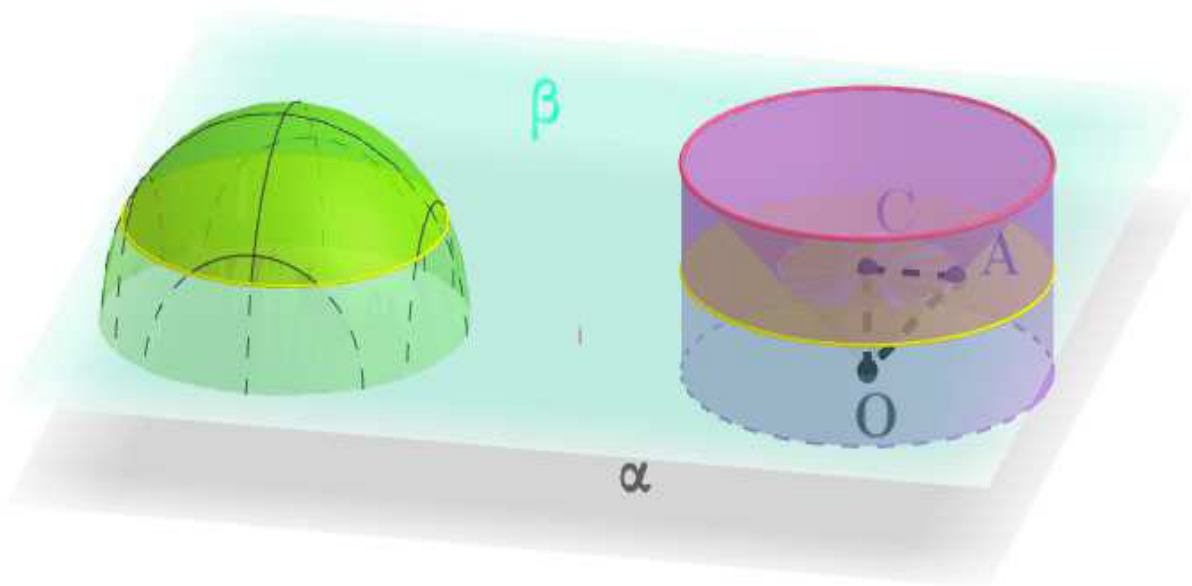


Figura 35 – Volume da Esfera

Se retiramos o cone ao cilindro obtemos um novo sólido. O plano  $\beta$  vai também secionar o novo sólido obtido gerando uma coroa circular de centro  $C$  cujo raio maior é  $R$  e raio menor é  $d$ , uma vez que o triângulo retângulo  $[COA]$  é isósceles dado que o  $\angle COA = 45^\circ$ , onde  $A$  é um ponto qualquer do círculo menor (ver figura 35). A área desta coroa circular é  $\pi \times R^2 - \pi \times d^2 = \pi \times (R^2 - d^2)$ . Verificamos assim que as áreas das secções geradas pelo plano  $\beta$  nos sólidos são iguais. Segue-se, então, pelo *Princípio de Cavalieri*, que os dois sólidos são equivalentes. Assim sendo,

$$\begin{aligned}
 \frac{V_{\text{esfera}}}{2} = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{cone}} &\iff \frac{V_{\text{esfera}}}{2} = \pi \times R^3 - \frac{1}{3} \times \pi \times R^3 \\
 &\iff V_{\text{esfera}} = 2 \times \pi \times R^3 - \frac{2}{3} \times \pi \times R^3 \\
 &\iff V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3. \qquad \text{c.q.d.}
 \end{aligned}$$

## 4 Área Lateral de Prismas e Sólidos de Revolução

Continuando no domínio Geometria e Medida — GM9, no subdomínio, Medida, e no objetivo geral 9 — Comparar e calcular áreas e volumes — exploremos agora os descritores 9.5, 9.7 e 9.8. (BIVAR et al., 2013c) Para determinar a área lateral do prisma e da pirâmide é trabalhado o descritor 9.7: «Identificar a área da superfície de um poliedro como a soma das áreas das respectivas faces». Conhecendo a área lateral do prisma a área lateral do cilindro determina-se pelo limite das áreas laterais dos prismas regulares inscritos e circunscritos no cilindro à medida que aumentamos o número de faces dos prismas. A área lateral do cilindro também pode ser obtida através da planificação da superfície lateral do cilindro quando este é intersetado por um plano ao longo da geratriz. A área total do cilindro segue como a soma da sua área lateral com a soma das áreas das suas bases circulares. Neste capítulo também será trabalhado o descritor 9.8 :« Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, que a medida, em unidades quadradas, da área (da superfície) lateral de um cone reto é igual ao produto da medida do comprimento da geratriz pelo raio da base multiplicado por  $\pi$ , sabendo que pode ser aproximada pelas áreas (das superfícies) laterais de pirâmides com o mesmo vértice e bases inscritas ou circunscritas à base do cone, ou, em alternativa, observando que a planificação da superfície lateral corresponde a um setor circular de raio igual à geratriz». Assim, a área lateral do cone também pode ser determinada pelo limite das áreas das superfícies laterais das pirâmides inscritas e circunscritas no cone à medida que aumentamos o número de faces dessas pirâmides como é demonstrado no subcapítulo 4.4 . A área total do cone segue também como a soma da sua área lateral com a área da sua base circular. Neste subcapítulo a planificação da superfície lateral do cone intersetada por um plano ao longo da geratriz pode ser vista como o setor circular de uma circunferência de raio igual à geratriz, e o comprimento do arco de circunferência é diretamente proporcional à amplitude do respetivo ângulo ao centro como é exigido no descritor 9.5: «Saber que, numa dada circunferência ou em circunferências iguais, o comprimento de um arco de circunferência e a área de um setor circular são diretamente proporcionais à amplitude do respetivo ângulo ao centro».

### 4.1 Área (da Superfície) Lateral do Prisma

Os resultados deste subcapítulo foram baseados em (ANDREEV; SHUVALOVA, 1974).

**Definição 8:** Uma secção perpendicular de um prisma é o polígono obtido pela intersecção de um plano perpendicular às arestas do prisma com o prisma.

**Teorema 12:** *A área lateral de um prisma é igual ao produto da medida de uma das suas arestas com o perímetro de uma secção perpendicular do prisma.*



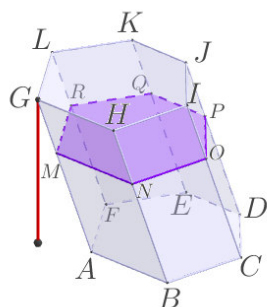


Figura 36 – Prisma [ABCDEFGH IJKLMNOP]

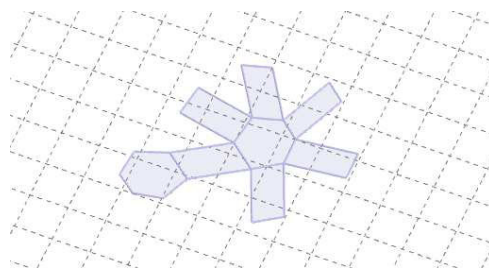


Figura 37 – Planificação do Prisma [ABCDEFGH IJKLMNOP]

**Demonstração:** Cada face lateral do prisma é um paralelogramo. Tomemos uma aresta do prisma como a base de um paralelogramo. Seja  $[MNOPQR]$  uma secção perpendicular do prisma (ver figura 36). A altura de cada paralelogramo correspondente a cada face do prisma é o lado da secção perpendicular respetiva. A área de cada face lateral é o produto da medida da sua base,  $l$ , com a medida da sua altura. A área lateral do prisma é igual à soma das áreas dos paralelogramos, ou seja,

$$\begin{aligned} A_{\text{Lateral do Prisma}} &= l \times \overline{MN} + l \times \overline{NO} + l \times \overline{OP} + l \times \overline{PQ} + l \times \overline{QR} + l \times \overline{RM} \\ \Leftrightarrow A_{\text{Lateral do Prisma}} &= l(\overline{MN} + \overline{NO} + \overline{OP} + \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RM}) \\ \Leftrightarrow A_{\text{Lateral do Prisma}} &= l \times P, \text{ com } P \text{ o perímetro da secção perpendicular do prisma c.q.d.} \end{aligned}$$

As construções no *GeoGebra* das figuras 36 e 37 podem ser visualizada no CD disponibilizado com o nome de PriPlanif.

**Corolário 2:** A área lateral de um prisma reto é igual ao produto do perímetro da sua base,  $P$ , e da medida da sua altura,  $h$ , ou seja,

$$A_{\text{Lateral do Prisma Reto}} = P \times h.$$

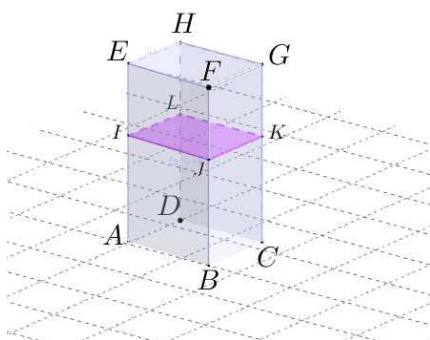


Figura 38 – Prisma Reto [ABC-DEFGH]

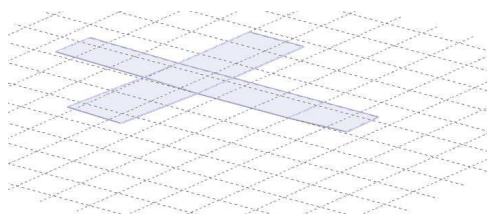


Figura 39 – Planificação do Prisma Reto [ABCDEFGH]

**Demonstração:** Consideremos a secção perpendicular do prisma,  $[ABCD]$  (ver figura 38). Então, pelo teorema anterior,

$$A_{\text{Lateral do Prisma Reto}} = P \times h$$



sendo  $P$  o perímetro de  $[ABCD]$ , ou seja, da sua base e  $h$  a medida de uma aresta lateral, ou seja, a medida da sua altura. c.q.d.

As construções no *GeoGebra* das figuras 38 e 39 podem ser visualizadas no CD disponibilizado com o nome de *ParalPlanif*.

## 4.2 Área (da Superfície) Lateral da Pirâmide

**Definição 9:** O apótema de um polígono regular é o segmento de reta definido do seu centro geométrico ao ponto médio de um dos lados desse polígono, ou seja, o apótema corresponde ao raio da circunferência inscrita no polígono regular.

O termo «apótema» provém do grego «apotithemi», que significa «abaixar», provavelmente no sentido de «baixar uma perpendicular», já que os apótemas, por força de definição, são sempre perpendiculares a algum segmento de reta.

**Definição 10:** O apótema de uma pirâmide regular é o segmento de reta definido do vértice da pirâmide ao ponto médio da base de uma das faces laterais, ou seja, o apótema corresponde à altura das faces laterais da pirâmide (que são triângulos isósceles).

**Teorema 13:** A área lateral de uma pirâmide regular é igual ao produto do comprimento do semiperímetro da sua base pelo comprimento do apótema.

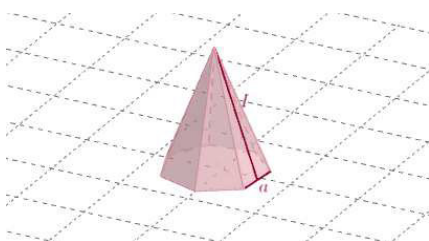


Figura 40 – Pirâmide Hexagonal

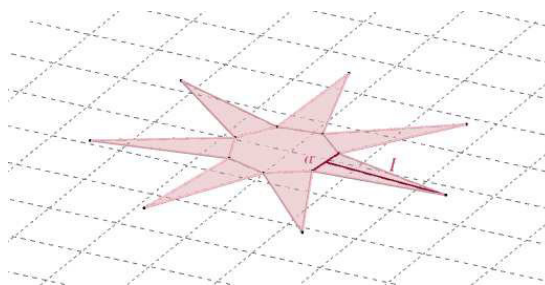


Figura 41 – Planificação da Pirâmide Hexagonal

**Demonstração:** Consideremos uma pirâmide poligonal regular com  $n$  lados. A sua área lateral é a soma das áreas das suas  $n$  faces laterais. Sendo essas faces triângulos isósceles temos que a área de cada face é  $\frac{a \times l}{2}$ , onde  $a$  é o lado da base da pirâmide e  $l$  o seu apótema. Então

$$A_{\text{Lateral da Pirâmide}} = \frac{a \times l}{2} \times n. \text{ Mas } P = a \times n, \text{ sendo } P \text{ o perímetro do polígono da base da pirâmide. Segue então que,}$$

$$A_{\text{Lateral da Pirâmide}} = \frac{P \times l}{2}.$$

(ANDREEV; SHUVALOVA, 1974)

c.q.d.

Consultar construção no *GeoGebra* no CD disponibilizado com o nome de *PriPlanif*.

### 4.3 Área (da Superfície) Lateral do Cilindro e Área Total do Cilindro

As demonstrações dos resultados deste subcapítulo foram baseadas em (ANDREEV; SHUVALOVA, 1974).

**Definição 11:** Dizemos que um prisma está inscrito num cilindro se os polígonos das suas bases estão inscritos nas bases circulares do cilindro

**Definição 12:** Dizemos que um prisma está circunscrito num cilindro se os polígonos das suas bases estão inscritos nas bases circulares do cilindro.

À medida que o número de faces laterais dos prismas regulares inscritos e circunscritos no cilindro aumenta a área (da superfície) lateral do cilindro é o limite das áreas (das superfícies) laterais desses prismas. A área lateral de um prisma regular inscrito num cilindro é  $A_{\text{Lateral do Prisma}} = P \times h$ , onde  $P$  é o perímetro do polígono regular inscrito na base circular do cilindro e  $h$  a altura do prisma que é igual à altura do cilindro. À medida que o número de lados do polígono da base do prisma regular inscrito aumenta, a sua altura  $h$  mantém-se inalterável e o perímetro  $P$  das suas bases tende para o limite  $2 \times \pi \times r$ , ou seja, para o perímetro da base circular do cilindro cujo raio é  $r$ . Podemos assim afirmar que o limite para o qual as áreas (das superfícies) laterais dos prismas inscritos tendem é a área (da superfície) lateral do cilindro, ou seja,

$$A_{\text{Lateral do Cilindro}} = 2 \times \pi \times r \times h, \text{ i.é.,}$$

a área (da superfície) lateral do cilindro é igual ao produto do perímetro da sua base pela sua altura.

A área total do cilindro é a soma da sua área lateral com a soma das áreas das suas bases. Segue que,

$$A_{\text{Total do Cilindro}} = 2 \times \pi \times r \times h + 2 \times \pi \times r^2,$$

ou seja,

$$A_{\text{Total do Cilindro}} = 2 \times \pi \times r(h + r).$$

Imaginemos a superfície (lateral) cilíndrica com uma altura  $h$  e uma base circular de raio  $r$  interseçada por um plano ao longo de uma geratriz, cortada e planificada juntamente com as bases do cilindro (ver figura 42).

Na planificação resultante do cilindro, a superfície lateral tem a forma de um retângulo em que um dos lados, o comprimento,  $c$ , é igual ao perímetro da base circular do cilindro e o outro lado, a largura,  $l$ , à sua altura (ver figura 43).

Daqui também se conclui facilmente que

$$A_{\text{Lateral do Cilindro}} = A_{\text{Retângulo}} = c \times l = 2 \times \pi \times r \times h.$$

As construções no *GeoGebra* das figuras 42 e 43 podem ser visualizadas no CD disponibilizado com o nome de Plancil.

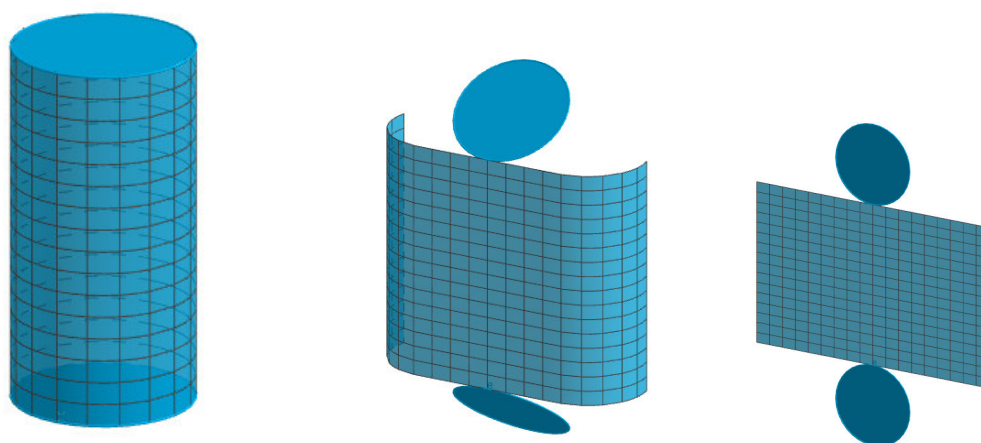


Figura 42 – Planificação do Cilindro

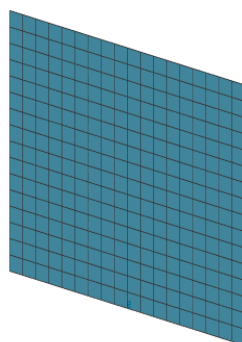


Figura 43 – Superfície lateral do Cilindro

#### 4.4 Área (da superfície) Lateral do Cone e Área Total do Cone

As demonstrações dos resultados deste subcapítulo também foram baseadas em (ANDREEV; SHUVALOVA, 1974).

A superfície lateral de um cone pode ser vista como o limite das superfícies laterais das pirâmides inscritas e circunscritas no cone, à medida que aumentamos ilimitadamente o número de faces destas pirâmides. Determinemos a área (da superfície) lateral do cone. A área (da superfície) lateral de uma pirâmide regular circunscrita num cone é  $A_{\text{Lateral da Pirâmide}} = \frac{P \times l}{2}$ , onde,  $P$  é o perímetro da sua base, i. é, o perímetro do polígono regular circunscrito na circunferência que é a base do cone e  $l$  o comprimento do seu apótema. À medida que aumentamos o número de lados da base da pirâmide circunscrita a sua superfície lateral tende para o seu limite, a superfície lateral do cone. O apótema da pirâmide mantém-se inalterável, igual à geratriz do cone (o que não se verifica com as pirâmides inscritas no cone) enquanto que o perímetro dos polígonos da base da pirâmide tendem para o seu limite, o perímetro da circunferência,  $2 \times \pi \times r$ , onde,  $r$  é o raio da circunferência. Segue que a área (da superfície)

lateral do cone é

$$A_{\text{Lateral Cone}} = \frac{2 \times \pi \times r \times l}{2},$$

ou seja,

$$A_{\text{Lateral Cone}} = \pi \times r \times l.$$

Para obter a área total do cone temos que adicionar a área da base à área (da superfície) lateral do cone. Segue que a área total do cone é

$$A_{\text{Total Cone}} = \pi \times r \times l + \pi \times r^2$$

ou seja,

$$A_{\text{Total Cone}} = \pi \times r \times (l + r).$$

Imaginemos a superfície lateral do cone cortada ao longo de uma geratriz,  $l$ , e planificada juntamente com a sua base. Nesta planificação a superfície lateral do cone toma a forma de um setor circular cujo raio é igual à sua geratriz e o arco do setor circular igual ao perímetro da sua base circular. O ângulo  $\alpha$ , o ângulo ao centro da superfície lateral do cone planificada, pode ser determinado como se segue. O comprimento do arco do setor circular que representa a superfície lateral do cone é  $l \times \alpha$ . Mas este comprimento também é igual a  $2 \times \pi \times r$ , i.é., o perímetro da base do cone. Assim, temos que,  $l \times \alpha = 2 \times \pi \times r$ , donde,  $\alpha = \frac{2 \times \pi \times r}{l}$ . Então,  $l = \frac{r}{\cos(\phi)}$ , onde  $\phi$  é o ângulo na base da secção axial do cone, ou seja, o ângulo da interseção do cone com o plano perpendicular à base que passa pelo vértice. Temos então que  $\alpha = 2 \times \pi \times \cos(\phi)$ . (ver figura 44)

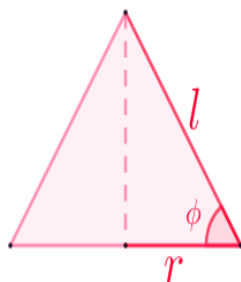


Figura 44 – Secção axial do Cone

A construção da figura 44 pode ser consultada com o nome de `SeccaoAxial`

## 4.5 Área da Superfície Esférica

No domínio GM9 — Geometria e Medida, do subdomínio — Medida e do objetivo geral 9 — Comparar e calcular áreas e volumes temos pelo descritor 9 que os alunos devem — «Saber que a medida, em unidades quadradas, da área de uma superfície esférica é igual a  $4 \times \pi \times R^2$ , onde  $R$  é o raio da esfera.» Neste capítulo demonstraremos através do teorema 14 este descritor. Antes de iniciarmos a demonstração consideremos o seguinte lema:

**Lema 1:** A área da superfície lateral de um cilindro, um cone e um cone truncado é igual ao produto da medida da sua altura pelo perímetro da circunferência cujo raio é igual ao comprimento do segmento de reta perpendicular traçado do ponto médio da geratriz ao eixo de rotação.

**Teorema 14:** A área da superfície esférica é igual a  $4 \times \pi \times R^2$ , em que  $R$  é o raio da superfície esférica.

**Demonstração:** Consideremos a linha poligonal regular  $[ABCDEF]$ , com  $n$  segmentos de reta, inscrita numa semicircunferência (ver figura 45). Pretende-se provar que através de uma rotação esta linha gera a superfície esférica. Esta superfície é obtida pela rotação da linha

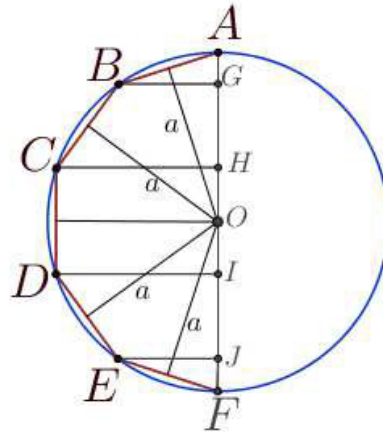


Figura 45 – Linha poligonal regular  $[ABCDEF]$  inscrita na semicircunferência

poligonal e é constituída pelas superfícies laterais de sólidos de revolução como cones, cones truncados e um cilindro no caso em que  $n$  é ímpar. Suponhamos que o comprimento do apótema da linha poligonal é  $a$ . Pelo Lema 1, temos que:

a superfície gerada por rotação de  $[AB]$  é igual a  $\overline{AG} \times 2 \times \pi \times a$ ,  
a superfície gerada por rotação de  $[BC]$  é igual a  $\overline{GH} \times 2 \times \pi \times a$ ,  
a superfície gerada por rotação de  $[CD]$  é igual a  $\overline{HI} \times 2 \times \pi \times a$ ,  
a superfície gerada por rotação de  $[DE]$  é igual a  $\overline{IJ} \times 2 \times \pi \times a$ ,  
a superfície gerada por rotação de  $[EF]$  é igual a  $\overline{JF} \times 2 \times \pi \times a$ ,

Assim, a linha gerada por rotação de  $[ABCDEF]$  é:

$$2 \times \pi \times a(\overline{AG} + \overline{GH} + \overline{HI} + \overline{IJ} + \overline{JF}) = 2 \times \pi \times a \times \overline{AF}.$$

À medida que o número de segmentos de reta da linha poligonal regular aumenta a superfície gerada por rotação desta linha tende para a superfície esférica. Da mesma forma o apótema da linha poligonal vai tender para o limite que é o raio da semicircunferência, que é o mesmo raio

da superfície esférica obtida,  $R$ . Tendo em conta o limite de ambos os membros da igualdade acima, e que  $\overline{AF} = 2 \times R$ , segue que,

$$S_{esfrica} = 2 \times \pi \times R \times 2 \times R = 4 \times \pi \times R^2, \quad c.q.d.$$

Ou seja, área da superfície esférica é igual a quatro vezes a área da circunferência maior. (ANDREEV; SHUVALOVA, 1974)

A construção da figura 45 pode ser consultada no CD com o nome de SupEsf.

## 5 Produto Escalar (Produto Interno)

Consultando o Programa e Metas Curriculares de Matemática A do ensino secundário (BIVAR et al., 2013a), no domínio, Geometria Analítica — GA10, no subdomínio, Geometria Analítica no espaço e no objetivo geral 7— definir referenciais cartesianos do espaço — é exigido no descritor 2 que o aluno saiba definir «projeção ortogonal de um ponto numa reta» e que reconheça que essa projeção é a interseção do plano normal à reta dada, que contém o ponto, com essa reta. Neste capítulo começaremos primeiro por abordar esse conceito e de seguida demonstrar este resultado. Mas antes precisamos demonstrar o resultado: «dado um vetor qualquer não nulo e um ponto qualquer no espaço existe um único plano a passar por esse ponto e tal que o vetor dado é normal a esse plano» referenciado no domínio, Geometria Analítica — GA11, no subdomínio, produto escalar, no descritor 4, do objetivo geral — determinar equações de planos no espaço. (BIVAR et al., 2013a) Este resultado é uma consequência de um outro já demonstrado no 9º ano. No domínio, Geometria e Medida — GM9, no subdomínio, paralelismo e perpendicularidade de retas e planos, no descritor 7, do objetivo geral 6, identificar planos perpendiculares e retas perpendiculares a planos no espaço euclidiano, é requerido o ao aluno: « Saber, dada uma reta  $r$  e um ponto  $P$ , que existe um único plano perpendicular a  $r$  passando por  $P$ , reconhecer que é o lugar geométrico dos pontos do espaço que determinam com  $P$ , se pertencer a  $r$ , ou com o pé da perpendicular traçada de  $P$  para  $r$ , no caso contrário, uma reta perpendicular a  $r$  e designar esse plano por «plano perpendicular (ou normal) a  $r$  passando por  $P$ » e, no caso de pertencer à reta, por «plano normal a  $r$  em  $P$  ». (BIVAR et al., 2013c) A seguir vamos demonstrar uma das propriedades do produto escalar no espaço: a distributividade do produto escalar em relação à soma de dois vetores, referida no descritor 9 do objetivo geral, definir e conhecer propriedades do produto escalar de vetores, do subdomínio, produto escalar e do domínio, Geometria Analítica — GA11. Mas antes vamos demonstrar uma propriedade do domínio, Geometria Analítica — GA10, necessária para a demonstração do resultado anterior e que aparentemente por lapso não se encontra referida nem demonstrada no referido domínio. Pretendo com esta demonstração contribuir para colmatar esta lacuna.

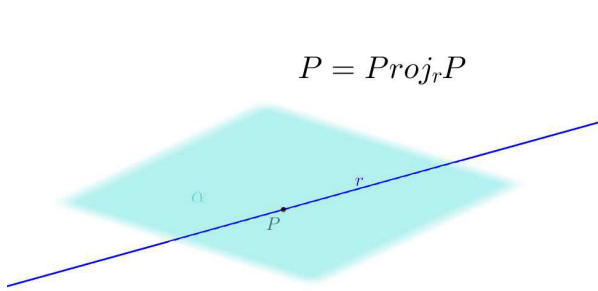
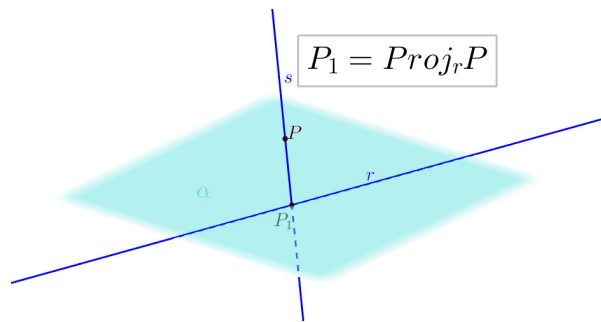
Os resultados expostos neste capítulo foram baseados em (BIVAR et al., 2013c), (BIVAR et al., 2012), (BIVAR et al., 2013a) e em (BIVAR et al., 2013b).

A definição 13 traduz o descritor 2, do objetivo geral 7 — Definir referenciais cartesianos do espaço, do subdomínio — Geometria Analítica no espaço e do domínio Geometria Analítica 10 — GA10.

**Definição 13:** Dado um ponto  $P$  e uma reta  $r$ , quaisquer, dizemos que a «projeção ortogonal de  $P$  sobre  $r$ » é o próprio ponto  $P$  se  $P \in r$ , ou então que é o pé da perpendicular de  $r$  a passar por  $P$ , caso  $P \notin r$  (ver figuras 46 e 47).

Na demonstração do teorema 15 será trabalhada a demonstração dos seguintes descritores:

- 3: «Saber que se uma reta  $r$  é perpendicular a duas retas  $s$  e  $t$  e num mesmo ponto  $P$ , é

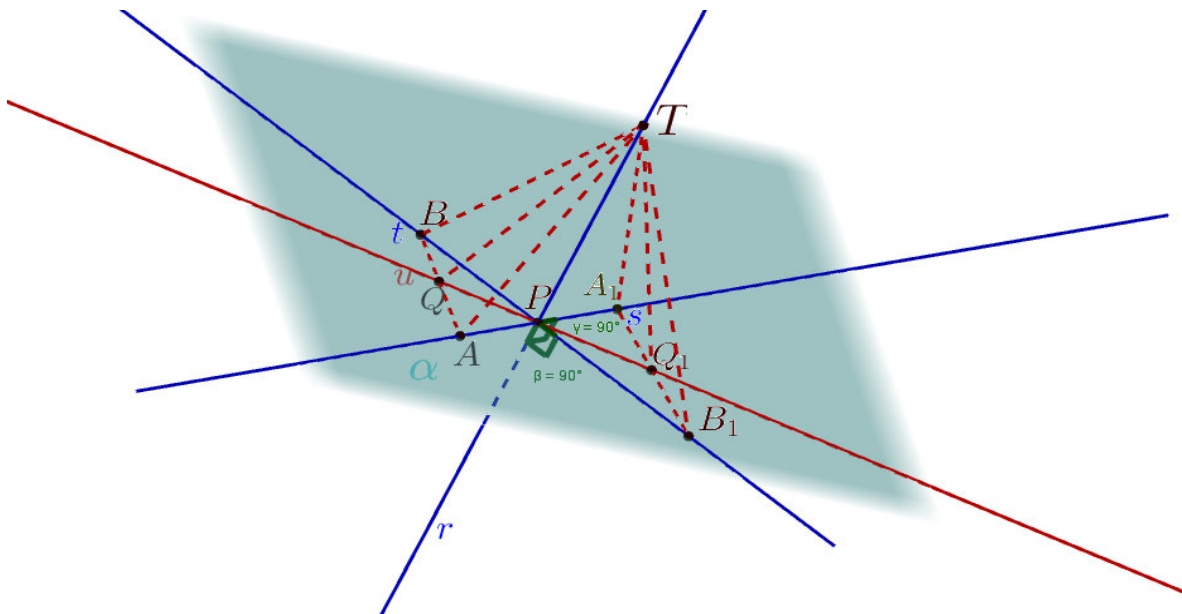
Figura 46 –  $P \in r$ Figura 47 –  $P \notin r$ 

igualmente perpendicular a todas as retas complanares a  $s$  e  $t$  que passam por  $P$  e que qualquer reta perpendicular a  $r$  que passa por  $P$  está contida no plano determinado pelas retas  $s$  e  $t$ ;

- 4: «Identificar uma reta como «perpendicular a um plano» num ponto  $P$  quando é perpendicular em  $P$  a um par de retas distintas desse plano e justificar que uma reta perpendicular a um plano num ponto  $P$  é perpendicular a todas as retas do plano que passam por  $P$ .»

do objetivo geral 6— Identificar planos perpendiculares e retas perpendiculares a planos no espaço euclidiano, do subdomínio— Paralelismo e perpendicularidade de retas e planos e do domínio Medida — GM9 baseada no caderno de apoio do 3º ciclo. (BIVAR et al., 2012)

**Teorema 15:** *Sejam  $r$ ,  $s$ , e  $t$  retas quaisquer, tais que  $r$  é perpendicular a  $s$  e a  $t$  num mesmo ponto  $P$ . Então  $r$  é perpendicular a todas as retas complanares com  $s$  e  $t$  que passam por  $P$  e essas retas estão contidas no plano formado pelas retas  $s$  e  $t$ .*

Figura 48 – Plano formado pelas retas  $s$  e  $t$  perpendiculares a  $r$  num ponto  $P$ 

**Demonstração:** Seja  $r$  uma reta qualquer tal que  $r \perp s$  e  $r \perp t$  num ponto  $P$ , sendo  $s$  e  $t$  retas quaisquer (ver figura 48). Pretendemos provar que  $r \perp u$  em  $P$ , sendo  $u$  uma reta



qualquer do plano definido pelas retas  $s$  e  $t$ . As retas  $s$  e  $t$  são concorrentes em  $P$ , logo  $u$  também é concorrente com  $s$  e  $t$  em  $P$  e só pode estar entre estas duas retas. Sejam  $A$  e  $A_1$  equidistantes de  $P$  e  $B$  e  $B_1$  igualmente equidistantes de  $P$  tais que  $A$  e  $A_1$  estão em  $s$  em duas semirretas opostas de origem  $P$  e  $B$  e  $B_1$  em  $t$  também em duas semirretas opostas, igualmente com origem em  $P$ . Sejam  $Q$  e  $Q_1$  nos segmentos  $[AB]$  e  $[A_1B_1]$ , respetivamente, e tal que  $Q, Q_1 \in u$ . Seja  $T \in r$  tal que  $T \neq P$ .  $P$  é o ponto médio de  $[AA_1]$  pois  $A$  e  $A_1$  são equidistantes de  $P$ ,  $r \perp s$ , logo  $r$  é a mediatriz de  $[AA_1]$ , então  $[AT] = [A_1T]$ . De forma análoga se demonstra que  $[BT] = [B_1T]$ .  $[AB] = [A_1B_1]$ , uma vez que  $A_1$  e  $B_1$  são imagens de  $A$  e de  $B$  pela reflexão central de centro  $P$  e as isometrias preservam os segmentos.  $[AT] = [A_1T]$ ,  $[BT] = [B_1T]$  e  $[AB] = [A_1B_1]$  então pelo critério LLL os triângulos  $[ABT]$  e  $[A_1B_1T]$  são iguais. Temos também que os triângulos  $[ABT]$  e  $[A_1B_1T]$  são isósceles, logo  $T\hat{A}B = T\hat{B}A$  e  $T\hat{A}_1B_1 = T\hat{B}_1A_1$ , donde  $T\hat{A}B = T\hat{A}_1B_1$ .  $Q_1$  é imagem de  $Q$  pela mesma reflexão central de centro  $P$  porque a imagem de  $Q$  tem de estar na reta  $QP$ , ou seja,  $u$ , e no segmento  $[A_1B_1]$  e  $Q \in [AB]$ .  $[AQ] = [A_1Q_1]$ , pela reflexão central de centro  $P$ ,  $Q\hat{A}T = B\hat{A}T = B_1\hat{A}_1T = Q_1\hat{A}_1T$  e  $[AT] = [A_1T]$ . Então, pelo critério LAL,  $\triangle[AQT] \equiv \triangle[A_1Q_1T]$ . Logo,  $[TQ] = [TQ_1]$ . Agora, pelo critério LLL, os triângulos  $[TPQ]$  e  $[TPQ_1]$  são iguais e consequentemente os ângulos  $T\hat{P}Q$  e  $T\hat{P}Q_1$  que são suplementares, logo  $T\hat{P}Q = T\hat{P}Q_1 = 90^\circ$ , donde  $r \perp u$ . c.q.d.

Quando uma reta  $r$  é perpendicular a duas retas de um plano  $\alpha$  que passam por um ponto  $P$  de  $r$  dizemos que a reta é perpendicular ao plano  $\alpha$  no ponto  $P$ . Pelo que acabámos de provar, que a reta  $r$  é então perpendicular a todas as retas do plano  $\alpha$  passam por  $P$ .

Na demonstração do teorema 16 será trabalhada a demonstração do descritor 4: «Reconhecer, fixado um referencial ortonormado do espaço e dado um vetor não nulo  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e um ponto  $P_0 = (x_0, x_1, x_3)$ , que existe um único plano  $\alpha$  que passa por  $P_0$  tal que  $\vec{v}$  é normal a  $\alpha \dots$ » do objetivo geral 3 — Determinar equações de planos no espaço, do subdomínio — Produto escalar e do domínio, Geometria Analítica — GA11.(BIVAR et al., 2013a) Consultando o caderno de apoio do 11º ano (BIVAR et al., 2013b) e na proposta de um exercício vemos a seguinte citação: «As justificações pedidas nas alíneas 1.1 e 1.2 são consequências imediatas do descritor GM9 — 6.7 das Metas Curriculares do Ensino Básico. Uma demonstração rigorosa destes factos pode ser encontrada no respetivo Caderno de Apoio, nomeadamente no Texto Complementar de Geometria, 9º ano, 6.7.» Nesse exercício o teorema 16 era proposto como uma atividade a ser realizada pelos alunos. Assim a demonstração seguinte foi baseada em (BIVAR et al., 2012).

**Teorema 16:** *Seja  $\vec{u} \neq \vec{0}$  e  $P \in \mathbb{R}^3$ . Então existe um e um só plano  $\alpha$  que contém  $P$  tal que  $\vec{u}$  é normal a  $\alpha$ .*

**Demonstração:** Sejam  $r$  uma reta qualquer,  $\vec{u}$  o seu vetor diretor,  $P \in \mathbb{R}^3$ ,  $P_1$  o pé da perpendicular a  $r$  a passar por  $P$ , caso  $P \notin r$  (ver figura 49), e  $P_1 = P$ , caso contrário. Pretendemos mostrar que existe um único plano  $\alpha$  perpendicular a  $r$  tal que  $P \in \alpha$  e que é o lugar geométrico dos pontos do espaço que contém todas as retas perpendiculares a  $r$  em  $P_1$ . Seja  $C \notin r$  um ponto qualquer. Então  $C$  e  $r$  determinam um plano  $\beta$ . Seja  $s \perp r$  uma reta em  $\beta$  tal que  $P_1 \in s$ . Seja  $t \perp \beta$  em  $P_1$  uma reta. Então temos que  $s \perp r$  e  $t \perp r$  em  $P_1$ , logo pelo

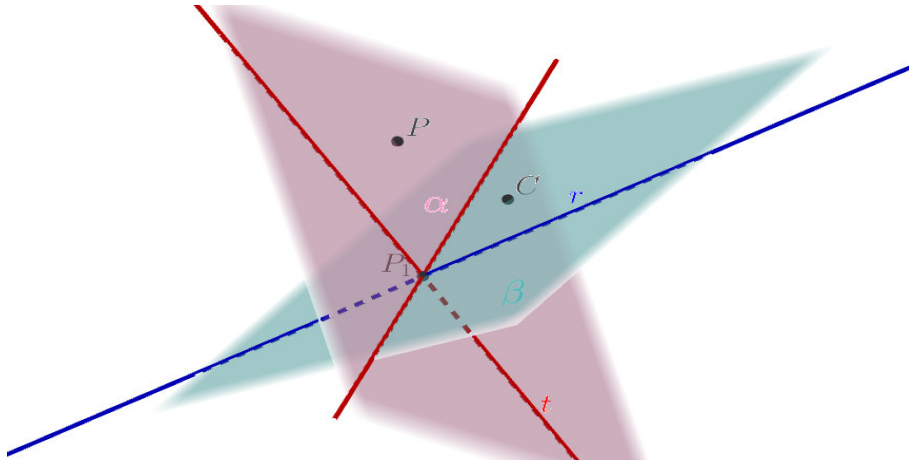


Figura 49 – Plano  $\alpha$  normal a um vetor diferente do vetor nulo

teorema anterior  $s$  e  $t$  determinam um plano  $\alpha$  perpendicular a  $r$  em  $P_1$ . Mostremos agora que  $\alpha$  é único. Seja  $Q$  um ponto qualquer tal que  $QP_1 \perp r$ . Pelo teorema anterior  $QP_1 \subset \alpha$ , pois  $\alpha$  contém todas as retas perpendiculares a  $r$  em  $P_1$ . Reciprocamente, também pelo teorema anterior, dada uma reta qualquer  $g$  tal que  $g \subset \alpha$  e  $P \in g$ , temos que  $g \perp r$ . Ou seja,  $\alpha$  é o único plano normal a  $r$  em  $P_1$  e que passa, portanto, também por  $P$  e é o lugar geométrico dos pontos do espaço que contém todas as retas perpendiculares a  $r$  em  $P_1$ . Provamos assim que  $\vec{u}$ , vetor diretor de  $r$  é perpendicular a  $\alpha$ . c.q.d.

**Teorema 17:** *Sejam  $P$  e  $r$  um ponto e uma reta quaisquer. A «projeção ortogonal de  $P$  sobre  $r$ » é a interseção do plano normal à reta  $r$  que contém  $P$  com a reta  $r$ .*

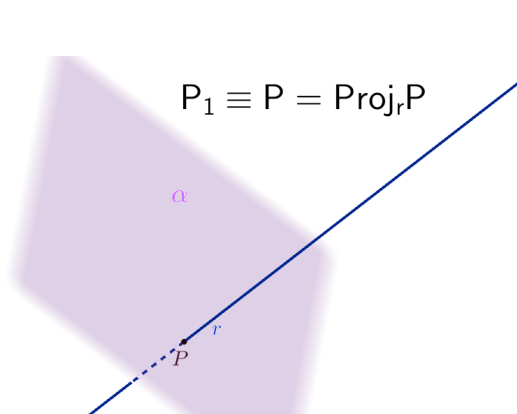


Figura 50 –  $P \in r$

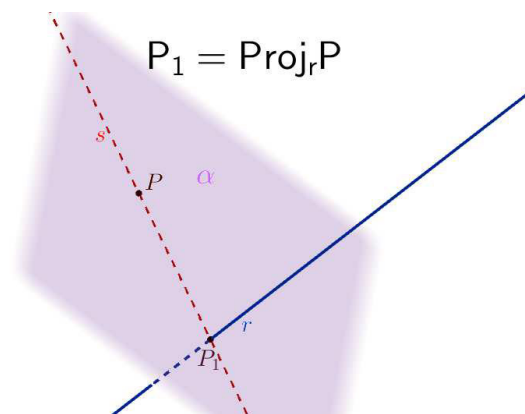


Figura 51 –  $P \notin r$

**Demonstração:** Sejam  $P$  e  $r$  um ponto e uma reta quaisquer. Consideremos o plano  $\alpha$  normal a  $r$  que contém  $P$  e  $P_1 = \text{Proj}_r P$ .  $P_1$  é o pé da reta perpendicular a  $r$ ,  $s$ , a passar por  $P$ , caso  $P \notin r$ , ou então  $P_1 = P$ , caso  $P \in r$  (ver figuras 50 e 51). No caso em que  $P \in r$ ,  $P_1 = P = r \cap \alpha$ . E no caso em que  $P \notin r$ ,  $P_1 = r \cap s$ , mas  $s \subset \alpha$ , donde  $P_1 = r \cap \alpha$ . Logo  $P_1$  é a interseção do plano normal à reta  $r$  que contém  $P$  com a reta  $r$ . c.q.d.

A definição 14 traduz o descritor 1, do objetivo geral 2 — Definir e conhecer propriedades do produto escalar de vetores, do subdomínio — Produto escalar, do domínio, Geometria Analítica — GM11.

**Definição 14:** Fixada uma unidade qualquer, seja  $O$  um ponto qualquer,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  dois vetores não nulos quaisquer onde  $P = O + \vec{u}$  e  $Q = O + \vec{v}$ . Definimos o «produto escalar (ou interno)» de  $\vec{u}$  com  $\vec{v}$  como o número  $\overline{OP} \times \overline{OQ_1}$ , onde  $Q_1$  é a projeção de  $Q$  sobre a reta  $OP$ , se  $OQ_1$  e  $OP$  têm o mesmo sentido e como o número  $-\overline{OP} \times \overline{OQ_1}$ , caso contrário. O produto escalar de  $\vec{u}$  com  $\vec{v}$  é nulo se  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ . Denotamos o produto escalar de  $\vec{u}$  com  $\vec{v}$  por « $\vec{u} \cdot \vec{v}$ » (ver figuras 52 e 53).

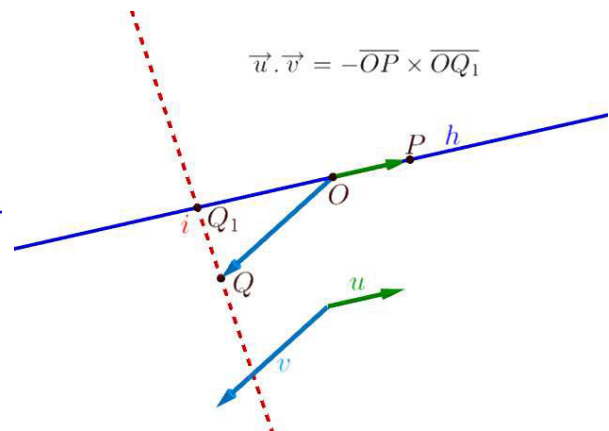
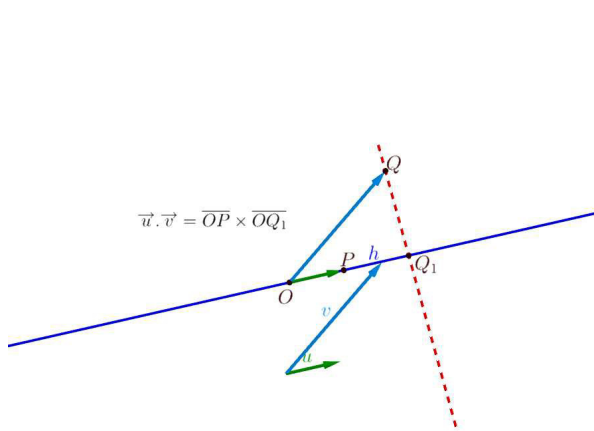


Figura 52 –  $OQ_1$  e  $OP$  têm o mesmo sentido      Figura 53 –  $OQ_1$  e  $OP$  têm sentido contrário

O teorema 18 serve de auxílio à demonstração do teorema 19.

**Teorema 18:** Seja  $P \in \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha$  um plano qualquer e  $r \subset \alpha$  uma reta qualquer. Seja  $P_1$  a projeção de  $P$  sobre  $\alpha$ . Então a projeção de  $P_1$  sobre  $r$  é igual à projeção de  $P$  na mesma reta.

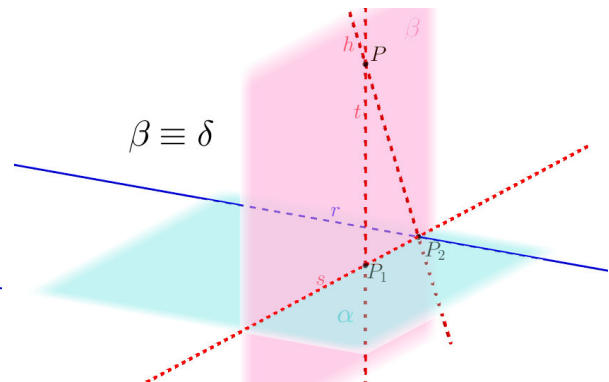
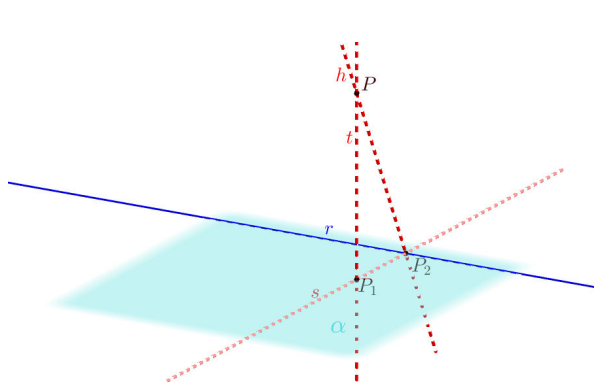


Figura 54 –  $P_1 = \text{Proj}_\alpha P$  e  $P_2 = \text{Proj}_r P_1$

Figura 55 –  $P_2 = \text{Proj}_r P_1 = \text{Proj}_r P$

**Demonstração:** Seja  $P \in \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha$  um plano qualquer e  $r \subset \alpha$  uma reta qualquer. Seja  $P_1 = \text{Proj}_\alpha P$  e  $P_2 = \text{Proj}_r P_1$  (ver figura 54). Pretendemos provar que  $P_2 = \text{Proj}_r P$ . Seja  $\beta$  o plano normal a  $r$  que contém  $P_1$ . Então, pelo teorema anterior,  $P_2 = \beta \cap r$ . Seja  $\delta$  o plano normal a  $r$  e que contém  $P$ . Então, também pelo teorema anterior  $P_2 = \delta \cap r$ . Mostremos que  $\delta \equiv \beta$  (ver figura

55).  $P_1 \in \beta$ ,  $P_1 = Proj_\alpha P$ , logo  $P \in \beta$  e  $P_2 = \beta \cap r$ , donde  $P, P_1, P_2 \in \beta$ .  $P \in \delta$ ,  $P_1 = Proj_\alpha P$ , logo  $P_1 \in \delta$  e  $P_2 = \delta \cap r$ , donde também  $P, P_1, P_2 \in \delta$ . Temos então que  $\{P, P_1, P_2\} \subset \beta$  e  $\{P, P_1, P_2\} \subset \delta$ , ou seja,  $\beta \equiv \delta$ . c.q.d.

No descritor 9, do objetivo geral 2— Definir e conhecer propriedades do produto escalar de vetores, no subdomínio— Produto escalar e no domínio Geometria e Medida— GM11 temos que os alunos devem — «Provar, dados vetores  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , que  $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$ ». Assim a demonstração do teorema ?? é baseada em (BIVAR et al., 2013b).

**Teorema 19:** Dados  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  temos que  $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$ .

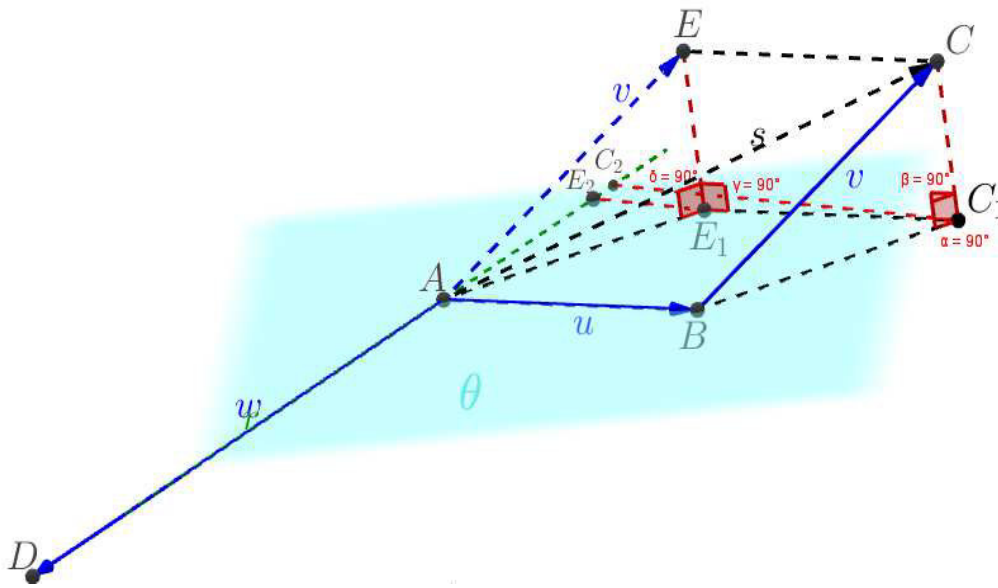


Figura 56 – Propriedade distributiva do produto escalar em relação à adição de vetores

**Demonstração:** Sejam  $\vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores do espaço quaisquer não nulos e  $A \in \mathbb{R}^3$ . Consideremos  $B = A + u$ ,  $C = B + v$  e  $D = A + w$  (ver figura 56).

Temos que

$$\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{w} \cdot \overrightarrow{AC_1},$$

onde  $C_1$  é a projeção ortogonal de  $C$  no plano  $ABD$ ,

$$\vec{w} \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{w} \times \overrightarrow{AC_2} \text{ e } \vec{w} \cdot \overrightarrow{AC_1} = \vec{w} \times \overrightarrow{AC_2},$$

onde  $C_2$  é a projeção ortogonal de  $C$  e de  $C_1$  na reta  $AD$ , pelo teorema anterior. Temos também que

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \vec{w} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{w} \cdot \overrightarrow{BC_1}.$$

Tomando  $E = A + \vec{v}$ , onde  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$ , temos também que

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = \vec{w} \cdot \overrightarrow{AE} = \vec{w} \cdot \overrightarrow{AE_1},$$

onde  $E_1$  é a projeção ortogonal de  $E$  no plano  $ABD$ ;

$$\vec{w} \cdot \overrightarrow{AE} = \vec{w} \times \overrightarrow{AE_2} \text{ e } \vec{w} \cdot \overrightarrow{AE_1} = \vec{w} \times \overrightarrow{AE_2},$$

sendo  $E_2$  a projeção de  $E$  e de  $E_1$  na reta  $AD$ , pelo teorema anterior. Temos que provar que  $\overrightarrow{AE_1} = \overrightarrow{BC_1}$ . Para tal basta provar que  $[AE_1C_1B]$  é um paralelogramo. Temos que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u} = \overrightarrow{EC}$ , porque  $[ABEC]$  é um paralelogramo.  $\overrightarrow{EC} \parallel \overrightarrow{E_1C_1}$  e  $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{E_1C_1}$  pois  $E_1$  e  $C_1$  são as projeções ortogonais de  $E$  e  $C$  no plano  $[ABD]$ , respetivamente; logo  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{E_1C_1}$  e  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{E_1C_1}$ .  $\overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{BC}$  e  $\overrightarrow{EE_1} \parallel \overrightarrow{CC_1}$  logo, pelo teorema 5 podemos concluir que  $[AEE_1] \parallel [BCC_1]$ , donde  $\overrightarrow{AE_1} \parallel \overrightarrow{BC_1}$ . Temos também que  $\triangle[AEE_1] \equiv \triangle[BCC_1]$  porque  $[AE] = [BC]$  e os ângulos agudos internos são iguais:  $\angle EAE_1 = \angle CBC_1$  e  $\angle AEE_1 = \angle BCC_1$ . Logo,  $\overrightarrow{AE_1} = \overrightarrow{BC_1}$ . Assim,  $[AE_1C_1B_1]$  é um paralelogramo. Então,

$$\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v} \iff \vec{w} \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{w} \cdot \overrightarrow{AB} + \vec{w} \cdot \overrightarrow{BC_1} \quad c.q.d.$$

donde,  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC_1}$ . Conseguimos assim demonstrar a distributividade do produto escalar em relação à adição de dois vetores no espaço, propriedade essa que envolve apenas vetores coplanares, ou seja, vetores do plano  $[ABD]$ .

As construções geométricas das figuras utilizadas neste capítulo podem ser consultadas no CD disponibilizado com os nomes de ProjecaoOrtogonal1, PlanoNormal1, PlanoNormal2, ProjecaoOrtogonal 2, ProjecaoOrtogonal3, ProdutoEscalar1, e também ProdutoEscalar2.



# Referências

AMADO, N.; SANCHEZ, J.; PINTO, J. A utilização do geogebra na demonstração matemática em sala de aula: o estudo da reta de euler. *Boletim de Educação Matemática*, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, v. 29, n. 52, p. 637–657, 2015. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v29n52/1980-4415-bolema-29-52-0637.pdf>. Citado 8 vezes nas páginas 15, 17, 24, 25, 26, 27, 28 e 29.

ANDREEV, P.; SHUVALOVA, E. *Geometry*. Moscow: Mir Publishers, 1974. Citado 11 vezes nas páginas 31, 38, 39, 40, 42, 49, 51, 53, 54, 55 e 58.

BARBOSA, A. C. C. et al. *Geometria no plano numa turma do 9º ano de escolaridade: uma abordagem sociolinguística à teoria de van Hiele usando o computador*. Dissertação (Mestrado), 2002. Disponível em: <https://repositorio-aberto.up.pt/handle/10216/64034>. Citado 3 vezes nas páginas 20, 25 e 30.

BIVAR, A. et al. Metas curriculares do ensino básico - matemática, caderno de apoio - 3.º ciclo. Ministério da Educação e Ciência: Direção Geral da Educação, 2012. Disponível em: [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/ca\\_3\\_ciclo\\_final.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/ca_3_ciclo_final.pdf). Citado 7 vezes nas páginas 19, 31, 39, 43, 59, 60 e 61.

BIVAR, A. et al. Metas curriculares matemática a - ensino ensino secundário - cursos científico-humanísticos de ciências e tecnologias e de ciências socioeconómicas. Lisboa: Ministério da Educação, 2013. Disponível em: [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/programa\\_metas\\_curriculares\\_matematica\\_a\\_secundario.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf). Citado 4 vezes nas páginas 28, 30, 59 e 61.

BIVAR, A. et al. Metas curriculares para o ensino secundário - matemática a - caderno de apoio - 11.º ano. Lisboa: Ministério da Educação, 2013. Disponível em: [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/ca\\_matematica\\_a\\_11ano.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/ca_matematica_a_11ano.pdf). Citado 3 vezes nas páginas 59, 61 e 64.

BIVAR, A. et al. Programa e metas curriculares matemática - ensino básico. Lisboa: Governo de Portugal-Ministério da Educação e Ciência, 2013. Disponível em: [http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa\\_matematica\\_basico.pdf](http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf). Citado 10 vezes nas páginas 20, 21, 22, 27, 30, 31, 47, 49, 51 e 59.

EVES, H. Two surprising theorems on cavalieri congruence. *The College Mathematics Journal*, Taylor & Francis, v. 22, n. 2, p. 118–124, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 36.

RIBEIRO, R. *Demonstração da fórmula do volume da pirâmide*. 2015. Disponível em: [http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades\\_diversas/ativ\\_wingeo2/volpiramide.html](http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/ativ_wingeo2/volpiramide.html). Citado 2 vezes nas páginas 33 e 36.

RODRIGUES, M. O processo de demonstrar na aula de matemática: um olhar sobre a comunicação emergente. Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, 2010. Disponível em: <https://repositorio.ipl.pt/bitstream/10400.21/1155/4/O%20processo%20de%20demonstrar.pdf>. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 27.

SANTOS, E.; RODRIGUES, M. Como desenvolver nos alunos a capacidade de demonstrar. Escola Básica 2, 3 de Bocage, 2009. Disponível em: [http://www.apm.pt/files/\\_CO\\_Rodrigues\\_Santos\\_4a7188bae5506.pdf](http://www.apm.pt/files/_CO_Rodrigues_Santos_4a7188bae5506.pdf). Citado 2 vezes nas páginas 17 e 27.

VILLIERS, M. D. D. The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, v. 24, p. 17–24, 1990. Citado 8 vezes nas páginas [17](#), [18](#), [19](#), [20](#), [21](#), [22](#), [23](#) e [25](#).